VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 34 October 1991 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

बहुचर A-फलन के लिए एक प्रसार सूत्र

आर० के० सक्सेना तथा यशवन्त सिंह

गणित तथा सांख्यिकी विभाग,

जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जुलाई 4, 1990]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुचर A-फलन तथा बेसेल फलनों वाले एक समाकल का मान ज्ञात किया गया है और इसका उपयोग इस A-फलन के लिए प्रसार सूत्र स्थापित करने में किया गया है।

Abstract

An expansion formula for multivariable A-function. *By* R. K. Saxena and Yashwant Singh, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Jodhpur (Raj.).

The authors evaluate an integral involving multivariable A-function and Bessel functions and use it in establishing an expansion formula for this A-function in terms of a series of product of A-function and Bessel function $J_v(x)$.

1. प्रस्तावना

गौतम, असगर तथा गोयल[1] द्वारा परिभाषित बहुचर A-फलन को निम्नवत् परिभाषित एवं अंकित किया जावेगा—

$$A[z_1, \ldots, z_r] = A^{m,n:M}_{p,q:N} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L^r} \theta_1(s_1) \ldots \theta_r(s_r) \phi(s_1, \ldots, s_r) z_1^{s_1} \ldots z_r^{s_r} \, ds_1 \ldots ds_r \tag{1.1}$$

यहाँ पर तथा पूरे प्रपत्र में (1.1) में प्रयुक्त संकेतों का निम्नलिखित अभिप्राय होगा :

$$M=m_1, n_1; \ldots ; m_r, n_r; \qquad N=p_1,q_1; \ldots ; p_r,q_r;$$

$$P_1=(a_j; A'_j, \ldots , A^{(r)}{}_j)_{1,p}; \qquad Q_1=(b_j; B'_j, \ldots , B^{(r)}{}_j)_{1,q};$$

$$P_2=(\alpha'_j, C'_j)_{1,p_1}; \ldots ; \quad (\alpha^{(r)}{}_j, C^{(r)}{}_j)_{1,p_r};$$

$$Q_2=(\beta'_j, D'_j)_{1,q_1}; \ldots ; \quad (\beta^{(r)}{}_j, D^{(r)}{}_j)_{1,q_r};$$

$$\omega=\sqrt{-1};$$

$$\theta_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{m_i}\Gamma\left(\beta_j^{(i)}-D_j^{(i)}s_i\right)\prod_{j=1}^{n_i}\Gamma\left(1-\alpha_j^{(i)}+C_j^{(i)}s_i\right)}{\prod_{j=m_i+1}^{q_i}\Gamma\left(1-\beta_j^{(i)}+D_j^{(i)}s_i\right)\prod_{j=n_i+1}^{p_i}\Gamma\left(\alpha_j^{(i)}-C_j^{(i)}s_i\right)} \tag{1.2}$$

$$\phi(s_1, \ldots , s_r)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+\sum_{i=1}^{r}A_j^{(i)}s_i\right)\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-\sum_{i=1}^{r}B_j^{(i)}s_i\right)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-\sum_{i=1}^{r}A_j^{(i)}s_i\right)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+\sum_{i=1}^{r}B_j^{(i)}s_i\right)} \tag{1.3}$$

यहाँ

$m, n, p, q, m_j, n_j, p_j$, एवं q_j अनृण संख्याएँ हैं तथा समस्त

$a_j's, b_j's, \alpha_j^{(i)}'s, \beta_j^{(i)}'s$ सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

यहाँ पर तथा आगे भी i का विचरण 1 से r तक होगा।

r-चरों के A-फलन को परिभाषित करने वाला बहुसमाकल परम अभिसारी होता है यदि

$$\xi_i^*=0, \eta_i>0 \text{ तथा } |\arg (\zeta_i)z_k|<\frac{\pi}{2}\eta_i$$

जहाँ

$$\zeta_1=\prod_{j=1}^{p}\left\{A_j^{(i)}\right\}^{A_j^{(i)}}\prod_{j=1}^{q}\left\{B_j^{(i)}\right\}^{-B_j^{(i)}}\prod_{j=1}^{q_i}\left\{D_j^{(i)}\right\}^{D_j^{(i)}}\prod_{j=1}^{p_i}\left\{C_j^{(i)}\right\}^{-C_j^{(i)}},$$

$$\xi_i^*=I_m\left[\sum_{j=1}^{p}A_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{q}B_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{q_i}D_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{p_i}C_j^{(i)}\right],$$

$$\eta_i = Re\Big[\sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^{p} A_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} B_j^{(i)} - \sum_{j=m+1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)}$$

$$- \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)}\Big]$$

A-फलन के विस्तृत विवरण के लिए देखें गौतम, असगर तथा गोयल[1] ।

2. समाकल

हमें जिस समाकल का मूल्यांकन करना है वह है

$$\int_0^\infty x^{-u} J_\mu(x) J_\nu(x) A_{p,\,q\,:\,N}^{m,\,n\,:\,M}\left[\begin{matrix} x^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ x^{2h_r} z_r \end{matrix}\middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix}\right] dx$$

$$= 2^{-u} A_{p+4,\, q+1\,:\,N}^{m+1,\, n+1\,:\,M}\left[\begin{matrix} 2^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ 2^{2h_r} z_r \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (R; h_1, \ldots, h_r) : P_1 \\ (u; 2h_1, \ldots, 2h_r) : Q_1 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} : (S, h_1, \ldots, h_r) : (T; h_1, \ldots, h_r); (U; h_1, \ldots, h_r) : P_2 \\ : Q_2 \end{matrix}\right] \qquad (2.)\,1$$

जहाँ

$$R = \frac{1-\mu-\nu+u}{2};\; S = \frac{u+\mu+\nu+1}{2};$$

$$T = \frac{u-\mu+\nu+1}{2};\; U = \frac{u+\mu-\nu+1}{2} \qquad (2.2)$$

समाकल (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है—

(i) $$Re\Big(\mu+\nu-u+2\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}}\Big) > -1; \qquad j=1, \ldots, m_i$$

(ii) $$Re\left(2\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{a_j^{(i)}-1}{C_j^{(i)}} - u\right) < -1; \qquad j=1, \ldots, n_i$$

(iii) $\Omega_i > 0$, $|\arg z_i| < \frac{1}{2}\Omega_i \pi$

जहाँ

$$\Omega_i = -\sum_{j=n+1}^{p} A_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} D_i^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} \tag{2.3}$$

उपपत्ति :

समाकल्य में बहुचर A-फलन को बहुगुण मेलिन-बार्नीज समाकल (1.1) के रूप में व्यक्त करने एवं समाकलनों के क्रम को परस्पर बदल देने पर, समाकल का रूपान्तर

$$\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r} \theta_1(s_1)\ldots\theta_r(s_r)\phi(s_1,\ldots,s_r)z_1^{s_1}\ldots z_r^{s_r}$$

$$\cdot\left\{\int_0^\infty x^{-\left(u-2\sum_{i=1}^{r} h_i s_i\right)} J_\mu(x)J_v(x)dx\right\}ds_1\ldots ds_r$$

में हो जाता है। यदि हम आन्तरिक समाकल का मान सूत्र [2, p. 342, (24)], द्वारा निकालें तथा परिणाम की व्याख्या (1.1) द्वारा करें तो हमें परिणाम (2.1) प्राप्त होता है।

3. प्रसार सूत्र

यहाँ हमें जिस प्रसार सूत्र की स्थापना करनी है वह है—

$$x^{-u}J_\mu(x)\, A_{p,\,q:N}^{m,\,n:M}\left[\begin{matrix} x^{2h_1}z_1 \\ \vdots \\ x^{2h_r}z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix}\right]$$

$$=2^{-u}\sum_{s=0}^{\infty} k\, J_k(x)\, A_{p+4,\ q+1\ :N}^{m+1,\ n+1:M}\left[\begin{matrix} 2^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ 2^{2h_r} z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \left(\frac{2-k-\mu+u}{2}; h_1,\ldots,h_r\right) \\ (1+u; 2h_1,\ldots,2h_r) \end{matrix}\right]$$

$$: P_1 : \left(\frac{2+k+\mu+u}{2}; h_1, \ldots, h_r\right) : \left(\frac{2+k-\mu+u}{2}; h_1, \ldots, h_r\right)$$

$$: Q_1$$

$$\left. : \left(\frac{2-k+\mu+u}{2} : h_1, \ldots, h_r\right) \begin{matrix} : P_2 \\ : Q_2 \end{matrix} \right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$h_1, \ldots, h_r$ धन संख्याएँ हैं तथा $k=u+2s+1$;

$$Re\left(\mu+\nu-u+2\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}}\right)>-1;\ j=1, \ldots, m_i;$$

$\Omega_i>0$; $|\arg z_i|<\frac{1}{2}\Omega_i\pi$

जहाँ Ω_i को (2.3) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$m, n, p, q, m_i, n_i, p_i$ एवं q_i ऐसी अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं कि $0\leqslant m_i\leqslant q_i$, $0\leqslant n_i\leqslant p_i$, $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$.

उपपत्ति :

माना कि

$$f(x)=x^{-u}J_\mu(x)\ A\left[\begin{matrix} x^{2h_1}z_1 \\ \vdots \\ x^{2h_r}z_r \end{matrix}\left|\begin{matrix} P_1 : P_2 \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix}\right.\right]$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty} C_s J_{\mu+2s+1}(x) \tag{3.2}$$

उपर्युक्त समीकरण वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(0,\infty)$ में, जब $u\geqslant 0$, बद्ध विचरण वाला है।

यदि हम (3.2) के दोनों पक्षों में $x^{-1}J_{u+2t+1}(x)$ से गुणा करें और x के प्रति 0 से ∞ तक समाकलन करें तो

$$\int_0^\infty x^{-u-1} J_{u+2t+1}(x) J_\mu(x)\; A^{m,\,n\,:\,M}_{p,\,q\,:\,N}\left[\begin{array}{c|c} x^{2h_1}z_1 & P_1 : P_2 \\ \vdots & \\ x^{2h_r}z_r & Q_2 : Q_2 \end{array}\right] dx$$

$$=\sum_{s=0}^{r} C_s \int_0^\infty x^{-1} J_{u+2t+1}(x)\, J_{u+2s+1}(x)\, dx$$

अब (2,1) एवं बेसिल फलनों [3, p. 291(6)] की लाम्बिकता गुण का उपयोग करते हुए

$$\int_0^\infty t^{-1} J_{v+2n+1}(t)\, J_{v+2m+1}(t) dt = 0, \text{ यदि } m \neq n,$$

$$=(4n+2v+2)^{-1}, \qquad \text{यदि } m=n,$$

$$R(v)+n+m>-1.$$

हमें निम्न की प्राप्ति होगी—

$$C_t=\frac{2^{-u}}{v^{-1}}\, A^{m+1,\,n+1\,:\,M}_{p+4,\,q+1\,:\,N}\left[\begin{array}{c|l} 2^{2h_1}z_1 & \left(\frac{2-\mu-v+u}{2}; h_1, \ldots, h_r\right) \\ \vdots & \\ 2^{2h_r}z_r & (1+u; 2h_1, \ldots, 2h_r) \end{array}\right.$$

$$: P_1 : \left(\frac{2+u+\mu+v}{2}; h_1, \ldots, h_r\right); \left(\frac{2+u+v-\mu}{2}; h_1, \ldots, h_r\right)$$

$$: Q_1$$

$$\left. : \left(\frac{u+\mu-v+2}{2}; h_1, \ldots, h_r\right) \begin{array}{l} : P_2 \\ \\ : Q_2 \end{array}\right] \tag{3.3}$$

जहाँ $v=u+2t+1$ (3.2) एवं (3.3) का उपयोग करने पर (3.1) की प्राप्ति होती है।

4. विशिष्ट दशाएँ

बहुचर A-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से यह एक तथा अनेक चरों वाले कई उच्चतर अबीजी फलनों में समानीत हो जाता है फलस्वरूप परिणाम (2.1) तथा (3.1) से दर्जनों विशिष्टीकरण प्राप्त होते हैं। संक्षिप्तता की दृष्टि से (2.1) तथा (3.1) की कुछ विशिष्ट दशाएँ आगे दी जा रही है

यदि $C_j's$ तथा $D_j's$ असली तथा धन हों और $m=n=p=q=0$, (2.1) तथा (3.1) क्रमशः निम्नलिखित परिणामों में समानीत हो जाता है

$$\int_0^\infty x^{-u} J_\mu(x) J_\nu(x) \prod_{i=1}^{r} \left\{ H_{p_i,q_i}^{m_i,n_i} \left[x^{2h_i} z_i \,\middle|\, \begin{matrix} \left(a_j^{(i)}, C_j^{(i)}\right)_{1,p_i} \\ \left(\beta_j^{(i)}, D_j^{(i)}\right)_{1,q_1} \end{matrix} \right] \right\} dx$$

$$= 2^{-u} A_{4,\,1\,:\,N}^{1,\,1\,:\,M} \left[\begin{matrix} 2^{2h_1} z_1 \\ \vdots \\ 2^{2h_r} z_r \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} (R; h_1, \ldots, h_r) : (S; h_1, \ldots, h_r) \\ (u; 2h_1, \ldots, 2h_r) \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} : (T; h_1, \ldots, h_r) : (U; h_1, \ldots, h_r) : P_2 \\ : Q_2 \end{matrix} \right], \tag{4.1}$$

जहाँ R, S, T एवं U को (2.2) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(4.1) की वैधता का प्रतिबन्ध निम्नवत् है—

(i) $\quad Re\left(\mu+\nu-u+2 \sum_{i=1}^{r} h_i \dfrac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(i)}}\right) > -1; \; j=1, \ldots, m_i\,.$

(ii) $\quad Re\left(2 \sum_{i=1}^{r} h_i \dfrac{a_j^{(i)}-1}{C_j^{(i)}} - u\right) < -1; \; j=1, \ldots, n_i\,.$

(iii) $\quad \delta_i > 0, \; |\arg z_i| < \frac{1}{2} \delta_i \pi$

जहाँ

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} > 0 \tag{4.2}$$

एवं

$$x^{-u} J_\mu(x) \sum_{i=1}^{r} \left\{ H_{p_i,\,q_i}^{m_i,\,n_i} \left[x^{2h_i z_i} \,\middle|\, \begin{matrix} \left(a_j^{(i)}, C_j^{(i)}\right)_{1,p_i} \\ \left(\beta_j^{(i)}, D_j^{(i)}\right)_{1,q_i} \end{matrix} \right] \right\}$$

$$=2^{-u}\sum_{s=0}^{\infty} k\, J_k(x)\, A^{1,\,1\,:\,M}_{4,\,1\,:\,N}\left[\begin{matrix}2^{2h_1}z_1\\ \vdots\\ 2^{2h_r}z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\left(\frac{2-k+\mu+u}{2};h_1,\ldots,h_r\right)\\ (1+u;2h_1,\ldots,2h_r)\end{matrix}\right.$$

$$:\left(\frac{2+k+\mu+u}{2};h_1,\ldots,h_r\right):\left(\frac{2+k-\mu+u}{2};h_1,\ldots,h_r\right)$$

$$:-$$

$$\left.:\left(\frac{2-k+\mu+u}{2};h_1,\ldots,h_r\right):\begin{matrix}P_2\\ Q_2\end{matrix}\right] \tag{4.3}$$

जहाँ $h_1, \ldots, h_r$ धन संख्याएँ हैं तथा $k=u+2t+1$;

$$Re\left(\mu+\nu-u+2\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\beta_j^{(i)}}{D_j^{(j)}}\right) > -1, \quad j=1, \ldots, m_i\,;$$

$$\delta_i > 0; \ |\arg z_i| < \tfrac{1}{2}\pi\delta_i\,,$$

जहाँ δ_i को (4.2) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

m_i, n_i, p_i एवं q_i

ऐसी अनृण संख्याएँ हैं कि

$$0 \leqslant m_i \leqslant q_i, \quad 0 \leqslant n_i \leqslant p_i.$$

दूसरी ओर यदि हम $r=2$, $z_1=\alpha$ एवं $h_2=0$, रखें तो (2.1) एवं (3.1) एक ज्ञात परिणाम में समानीत हो जाते है[4]।

प्राचलों के और आगे विशिष्टीकरण पर हमें बोरा तथा कल्ला[5] एवं बाजपेयी[6] के परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

निर्देश

1. गौतम, जी० पी०, असगर, ए० एस० तथा गोयल, ए० एन०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1986, **29**, 67-81.

2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि; Tables of Integral Transforms, भाग 2 मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.

3. ल्यूक, वाई० एल०, Integrals of Bessel Functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1962

4. वोरा, एस० एल०, सक्सेना, आर० के० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman, Rev. Ser. 1972, **A22**, 43-48.

5. वोरा, एस० एल० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman, Rev. Ser. 1971, **A21**, 53-58.

6. बाजपेयी, एस० डी०, Proc. Camb. Phil. Soc. 1969, **65**, 683-685.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

गिरिडीह् के लोगों में Rh^{-ve} घटनाओं की गणना

चतुर्भुज साहु

मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह् कॉलेज, गिरिडीह् (बिहार)

[प्राप्त—अक्टूबर 28, 1990]

सारांश

मानव विभेदों के अध्ययन में *Rh* एक समूह और उसके विभिन्न ऐलीलों की खोज ने एक नई दिशा दी है। रक्त के आदान-प्रदान में *Rh* रक्त-समूह के दो फिनोटाइपों Rh^+ तथा Rh^- की अत्यधिक महत्ता है। प्रस्तुत अध्ययन में 44 Rh^+ सन्तान की माताओं में प्रथम प्रसवावस्था के समय ऐण्टी-*D* इम्युनो-ग्लोबिन की सुई न लगाने पर भी 14 बच्चे सामान्य रूप से पैदा हुए जबकि शेष बच्चे रुग्ण थे। सेक्स होमोजिनीटी के अन्तर्गत काई वर्ग में महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया ($\chi^2=24$, $df=1$, $p>0.05$)।

Rh^- घटनाओं की गणना करने पर पाया गया कि 10000 गर्भों में से 720 केसों में Rh^- माँ होंगी और उनमें से 92 प्रतिशत केसों में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस के लिए Rh^- जीनी प्रतिबन्ध होंगे।

Abstract

An estimation of Rh⁻ negative incidence among the people of Giridih. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College (Bihar).

The discovery of *Rh* blood group and its different alleles has given a new direction to the study of human diversity. The simple dicotomy of the *Rh* blood group phenotypes into Rh^- positive and Rh^- negative has still its importance in clinical obstetrics and blood transfusion. In the present study an attempt has been made to estimate the rate of Rh^- negative incidence among 1100 blood samples of Giridih town. The sex homogeneity chi square has been found significant ($\chi^2=24$, $df=1$, $p>0.05$).

Rh− negativg mothers gave birth to 14 (20%) *Rh* positive normal children without injected anti-D immunoglobin injection whereas 30 (41.97%) cases occurred with jaundice, abnormal babies, congenital malformed foetus, meningomyelocale with talipus equinovarus deformity.

It has been estimated that in 10000 pregnancies 720 cases would be of *Rh*− negative mothers and of which 92% cases will have the *Rh* genetic conditions for Erythroblastosis foetalis.

मानव-विभेदों के अध्ययन के लिए मानव-वैज्ञानिक सर्वप्रथम मानवमिति एवं रक्त समूहों की प्रविधियों का ही प्रयोग करते थे। परन्तु, *Rh* तथा उसके विभिन्न ऐंटीजेनों आदि की खोज ने मानव-विभेदों के अध्ययन को एक नई दिशा प्रदान की है। रक्त-वर्ग के अन्तर्गत *Rh* संहति गर्भाधान एवं प्रजनन की दृष्टि से विशेष महत्व रखता है। इसके मूल में विरोधी रिसस सिरम द्वारा आतंचित कोशिकाएँ हैं। *Rh*− स्त्री तथा *Rh*+ पुरुष के यौन-सम्बन्ध से भ्रूण रोगग्रस्त हो सकता है। यानुस[1] ने बताया है कि *Rh* अपेक्षाकृत *ABO* रक्त-वर्ग के असंयोज्य स्त्री-पुरुष यौन-सम्बन्ध से भ्रूण के रोगी होने तथा गर्भपात होने की सम्भावना कहीं अधिक है क्योंकि *ABO* की असंयोज्यता से ऐण्टीबॉडी अधिक शीघ्र परिवर्द्धित होते हैं।

ABO रक्त-समूह एवं रोग से सम्बन्धित कुछ शोध-कार्य प्रकाशित हुए हैं और पाया गया है कि *A* रक्त-समूह के अधिक व्यक्ति रोग से ग्रसित होते हैं (चक्रवर्ती[2])। अर्ड तथा अन्यों[3] ने *ABO* तथा *Rh* रक्त-समूहों एवं रोग की गणना की है। सालजानो[4] ने कुष्ठ रोगियों में *Rh* (*D*) का परिणाम प्रस्तुत किया है, परन्तु χ^2 (काई वर्ग) में उन्हें कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं मिला है।

इस प्रकार का कार्य सामान्यतः बिहार एवं विशेषकर गिरिडीह में नहीं किया गया है। *Rh* रक्त समूह के दो फिनोटाइप *Rh*+ एवं *Rh*− की महत्ता अभी भी रक्त के आदान-प्रदान में बनी हुई है। इसी को ध्यान में रखकर प्रस्तुत अध्ययन में गिरिडीह के लोगों में *Rh*− घटनाओं की गणना करने की चेष्टा की गई है।

प्रयोगात्मक

सामग्री एवं विधि :

वर्तमान अध्ययन के लिए कुल 1100 व्यक्तियों स्त्री पुरुष को जाँचा गया। 2-3 बूंद रक्त अंगुली से या 1 मिली॰ रक्त शिरा से निकाल कर विन्ट्रोव बोतल में रखकर रक्त-समूह तथा *Rh* की गणना की गयी। इसके लिए डाउन्सफोर्ड तथा बाउली[5] की विधि को अपनाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से पता चलता है कि *AB*+ (8%) तथा *AB*− (0.001%) की बारम्बारता कम है जबकि *B*+ तथा *B*− एवं *O*+ तथा *O*− की बारम्बारता लगभग समान और अधिक है। वर्तमान अध्ययन साहु तथा अन्यो[6] के ही समान है।

सारणी 1

ABO रक्त-समूह की बारम्बारता

रक्त-समूह	बारम्बारता (% में)
AB^+	8
AB^-	0.001
A^+	26
A^-	1
B^+	29
B^-	3
O^+	30
O^-	3

सारणी 2

Rh^- माता तथा Rh^+ पिता से उत्पन्न Rh^- एवं Rh^+ सन्तान की बारम्बारता

Rh^- माता	Rh^- सन्तान	Rh^+ सन्तान	
71	27 (38.03%)	44 (61.97%)	
		सामान्य प्रसव	असामान्य प्रसव
		14 (20%)	30 (41.97%)

71 Rh^- माताओं ने 27 (38.03%) Rh^- तथा 44 (61.97%) Rh^+ सन्तानों को जन्म दिया जिनमें सभी Rh^- सन्तानें सामान्य पायी गयीं जबकि Rh^+ सन्तानें सामान्य तथा असामान्य दोनों ही तरह के प्रसवों से उत्पन्न हुईं। 44 Rh^+ सन्तान की माताओं में प्रथम प्रसवावस्था के समय ऐण्टी-D इम्युनोग्लोब्रिन की सुई नहीं लगने के बावजूद भी 14 (20%) Rh^+ बच्चे सामान्य रूप से पैदा हुए परन्तु 30 (41·97%) बच्चे पीलिया, जन्मजात कुपोषित बच्चे, असामान्य मेनिंगोमाइलोसिल रोगों से ग्रसित थे।

सारणी 3

1100 स्त्री-पुरुषों में Rh^+ तथा Rh^- की बारम्बारता

लिंग	संख्या	Rh^+ की संख्या	%	Rh^- की संख्या	%
पुरुष	390	382	97.7	8	2.1
स्त्री	710	739	90	71	10
कुल	1100	1021	92.8	79	7.2

χ^2 (काई वर्ग)$=24^*$, $df=1$

* महत्वपूर्ण अन्तर दर्शाता है 0.05 पर

सारणी-3 में Rh^+ और Rh^- फिनोटाइप को पुरुषों एवं स्त्रियों के सन्दर्भ में दर्शाया गया है। काई वर्ग जाँच से पता चलता है कि सेक्स होमोजिनीटी के बीच महत्वपूर्ण अन्तर है ($\chi^2=24$)। पुरुषों तथा स्त्रियों की संख्या मिला देने से कुल 1100 हिन्दुओं में Rh^+ की घटना 92.8% तथा Rh^- की घटना 7.2% पायी गयी।

चूंकि Rh^- घटना से सम्बन्धित शोध कार्य नहीं के बराबर है इसलिए प्रस्तुत अध्ययन की चक्रवर्ती तथा अन्यों[7] के द्वारा राँची के हिन्दू समुदाय में प्राप्त घटना 3.13% से तुलना की गयी है। वर्तमान अध्ययन में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस की सम्भावित दर की गणना Rh^- की कुल घटना 7.2% पर आधारित है

यदि

$p=D$ प्रबल जीन की बारम्बारता

$q=d$ अप्रबल जीन की बारम्बारता

तथा

$p+q=1$ सम्पूर्ण जीन आवृति

तो हार्डी-वाइनवर्ग सन्तुलन नियम के अनुसार

पित्रीय यौन सम्बन्ध पुरुष × स्त्री			उत्पन्न सन्तानों में प्रत्याशित जीन प्ररूप (% में)		
♂		♀	DD	Dd	dd
Dd	×	dd	×	50	50
pq	×	q^2		pq^2	pq^3
DD	×	dd	100	×	×
p^2	×	q^2	p^2q^2		

Rh^- माताओं के कुल गर्भ में—

(1) $pq^3\,(dd)\ Rh^-$ फैक्टर उत्पन्न करेगा और (2) शेष आधा $pq^3\,(Dd)+p^2q^2\,(DD)\ Rh^+$ फैक्टर उत्पन्न करेगा।

अतः

(1) $$\frac{pq^3}{2\,pq^3+p^2q^2}$$

$$=\frac{pq^3}{pq^3+pq^3+p^2\,q^2}$$

$$=\frac{pq^3}{pq^2(q+q+p)}$$

$$=\frac{q}{q+q+p}$$

$$=\frac{q}{q+1}$$

सिद्धान्ततः Rh^- माँ गर्भवती होने पर Rh^- फैक्टर उत्पन्न करती है जो पूर्णतः सुरक्षित है।

(2) $$\frac{pq^3+p^2q^2}{2\,pq^3+p^2q^2}$$

$$=\frac{pq^2\,(q+p)}{pq^3+pq^3+p^2q^2}$$

$$=\frac{pq^2\,(q+p)}{pq^2\,(q+q+p)}$$

$$=\frac{q+p}{q+q+p}$$

$$=\frac{1}{q+1}$$

अतः Rh^- माँ गर्भवती होने पर Rh^+ फैक्टर उत्पन्न करती है जो भ्रूण के लिए घातक है।

अब

$$\frac{1}{q+1}=\frac{1}{Rh^-+1}=\frac{1}{0.072+1}=0.924$$

इसलिए Rh^- गर्भवती माताएं 92% स्थिति में फिटस के लिए हिमोलायटिक उत्पन्न करेंगी। इससे यह गणना की जा सकती है कि 10000 गर्भों में 720 केसों में Rh^- माँ होंगी और उनमें से 92%

जो लगभग 662 केसों में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस के लिए Rh^- जीनी प्रतिबन्ध होंगे। चक्रवर्ती तथा अन्यों ने[9] राँची की हिन्दू आबादी में गणना करके पाया है कि 10000 गर्भों में 313 केसों में Rh^- माँ हैं जिनमें से 294 केसों में इरैथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस के लिए जीनी प्रतिबन्ध है।

मुखर्जी[8] ने पश्चिम बंगाल के हिन्दुओं पर इसकी घटना का दर 3.26 पाया है।

हार्टमेन[9] एवं स्ट्राटन[10] ने यूरोपीय जनसंख्या पर गणना के बाद पाया कि फीटस में हिमोलायटिक रोग की बारम्बारता बहुत ही कम (लगभग 5% से 10%) है। इसी तरह की समान घटना की दर से गिरिडीह के लोगों पर गणना करने पर यह पाया गया कि 10000 गर्भों में केवल 33 से 66 केसो (662 माताओं का 5% से 10% जो Rh^- फीटस को अपने गर्भ में पाल रही हों) में ही इरेथ्रोब्लास्टोसिस फिटलिस रोग होगा तथा यह घटना राँची की हिन्दू जनसंख्या में 12 से 25 केसों में ही लागू होगी।

निर्देश

1. यानुस, ब्युत्नर, ने० से० इन मैन, 1959, 61, 437
2. चक्रवर्ती, एम० आर०, एन्थ्रो० स० ई०, 1972
3. अर्ड, एल०, वेन्टाल, एच० एच० तथा रोबर्ट, जे० ए० एफ०, ब्रि० मे० जं० 1953, 1, 799
4. सालजानो, एफ० एम०, मे० जेने० 1967, 4, 102-106
5. डाउन्सफोर्ड, आई० तथा बाउली, सी० सी०, ओ० ए० ब्रो०, 1955
6. साहु, चतुर्भुज तथा गोपालकृष्णन, के० आर०, ईस्का, 1984 (अप्रकाशित)
7. चक्रवर्ती, आर०, बोस, के० सी० तथा नारायण, डी०, ई० एन्थ्रो०, 1981, II, 65-58
8. मुखर्जी, बी० एन०, टे० रि० एन्थ्रो० 1970, 8170
9. हार्टमेन, सी०, ब्ले० सा० प० लन्दन, 1949
10. स्ट्राटन, एफ०, बटर, लन्दन, 1953

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

अवशिष्ट Cd×Pb अन्योन्य क्रिया का उपज तथा भारी धातुओं के अवशोषण पर प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा प्रमोद कुमार शुक्ल
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मार्च 1, 1991]

सारांश

प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया का पौधों तथा मिट्टी के प्रभाव पर चल रहे अध्ययन को आगे बढ़ाते हुए हमने कैडमियम (Cd)× लेड (Pb) की अन्योन्य क्रिया का अवशिष्ट प्रभाव देखने के लिए फसल चक्र के अन्तर्गत तीसरी फसल पालक उगायी। हमने देखा कि इस अवशिष्ट अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज पर कोई प्रभाव नहीं हुआ, यद्यपि अकेले कैडमियम का उल्लेखनीय प्रभाव दिखा।

यह भी पाया गया कि पालक की जड़ों तथा तनों द्वारा कैडमियम तथा लेड का अवशोषण इसके पूर्व उगाई गई मक्का या शलजम की फसल से कम हुआ और यह अवशोषण योगवाही अन्योन्य क्रिया (Synergistic effect) का सूचक है। पालक द्वारा Fe, Zn एवं Mn जैसी धातुओं के अवशोषण पर प्रतिरोधी अन्योन्य क्रिया (antagonistic interaction) पाई गई।

Abstract

Effcct of residual Cd×Pb interactiou on the yield and uptake of heavy metals by spinach. *By* S. G. Misra and P. K. Shukla, Sheila Dhar Institute of Soil Sciences, University of Allahabad, Allahabad.

In continution to our previous studies regarding the effect of Cd×Pb interation on plants and soil, an experiment was conducted to assess the residual effect of pollutants interaction on the third crop which was spinach. It has been observed that residual Cd×Pb interaction was not reflected on the yield of this third crop. Only Cd exhibited remarkable effect on the yield of spinach whereas no such effect was found with Pb.

It was also observed that the uptake of Cd and Pb roots and shoots of spinach was less than either of maize or turnip grown previously only high levels of Cd and Pb could exert a synergistic interacting effect on their uptake whereas an antagonistic interacting effect was seen on the uptake of heavy metals like Fe, Zn and Mn by spinach.

पौधों तथा जानवरों के लिए धात्विक प्रदूषकों की अत्यधिक विषाक्तता मृदा प्रदूषण की एक जटिल समस्या है। ये प्रदूषणकारी धातुएँ (Cd, Pb, Hg, Cr आदि) अब मिट्टी की ऊपरी सतह पर जिस पर पौधे उगते हैं तथा मानव जीवन की दैनिक क्रियाएँ होती हैं, एकत्रित हो जाते हैं तो वे आपस में अन्य पोषक तत्वों एवं जन्तुओं के साथ प्रतिरोधी (Antagonistic) या योगवाही (Synergistic) अन्योन्य क्रिया (Interaction) करते हैं[7]। फलस्वरूप पौधों के लिए प्रदूषकों एवं पोषक तत्वों की उपलब्धता और उनका अवशोषण प्रभावित होता है। साथ ही जन्तुओं की जीवन प्रक्रियाओं पर भी कुप्रभाव पड़ता है।

पौधों द्वारा कैडमियम (Cd) तथा लेड (Pb) के अवशोषण से फसल उपज एवं उसकी गुणवत्ता पर प्रभाव पड़ता है[3]। हमने अपने पूर्व प्रयोगों [5,6] से यह निष्कर्ष निकाला है कि कैडमियम तथा लेड को मिट्टी में अलग-अलग या उन्हें एक साथ मिला कर डालने से उगाई गई प्रथम फसल मक्का व द्वितीय फसल शलजम के अंकुरण व उपज में कमी आती है और मिट्टी में इन प्रदूषकों की डाली गयी मात्रा के अनुसार ही इनका अवशोषण होता है। इसके फलस्वरूप अन्य भारी धातुओं (Fe, Zn, Mn एवं Cr) की उपलब्धता व अवशोषण दोनों ही में कमी आयी। हमने यह भी पाया कि कैडमियम तथा लेड में योगवाही अन्योन्य क्रिया हुई जबकि अन्य तत्वों के साथ इनकी प्रतिरोधी अन्योन्य क्रिया हुई। यही नहीं, लेड की अपेक्षा कैडमियम अधिक शक्तिशाली प्रदूषक सिद्ध होता है।

उपर्युक्त परिणामों एवं कारणों को ध्यान में रखकर कैडमियम तथा लेड से पूर्व उपचारित प्लाटों में फसल चक्र में तीसरी फसल पालक उगायी गयी और प्रदूषकों की अवशिष्ट अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज तथा पालक द्वारा अन्य भारी धातुओं के अवशोषण का अध्ययन प्रस्तुत किया जा रहा है।

प्रयोगात्मक

प्रक्षेत्र की तैयारी

शीलाधर अनुसन्धान फार्म में 48 मी०^2 प्रक्षेत्र का चुनाव तथा उसकी अच्छी तरह तैयारी करके 1×1 मी०^2 आकार के 48 प्लाटों में बाँट लिया गया। फिर यादृच्छिक विधि द्वारा उपचार करके जून 1989 से फसल चक्र में लगातार मक्का, शलजम, पालक (कुल तीन फसलों) की फसलें उगायी गयीं। फसलों की कटाई परिपक्व होने पर की गयी। मृदा और पौधों के रासायनिक विश्लेषण के लिए प्रत्येक प्लाट से अलग-अलग प्रतिदर्श लिए गए।

उपचार

प्रक्षेत्र के 1×1 मी०^2 क्षेत्रफल के प्लाटों में 0, 25, 50 एवं 100 मिग्रा०/किग्रा० कैडमियम तथा 0, 100, 200 एवं 400 मिग्रा०/किग्रा० लेड प्रति हेक्टेयर की मात्राएँ डाली गयीं। कैडमियम

सारणी 1

Cd × Pb अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज पर प्रभाव*

उपचार संख्या	उपचार (मि०/कि० ग्रा०)	पौधों तथा जड़ों का हरा जैव भार (ग्राम/प्लाट/मी०²) पौधों का भार	जड़ों का भार
1.	लेड 0+कैडमियम 0	600.00	100.00
2.	+कैडमियम 25	533.33	90.00
3.	+कैडमियम 50	500.00	80.00
4.	+कैडमियम 100	433.33	73.33
5.	लेड 100+कैडमियम 0	566.66	93.33
6.	+कैडमियम 25	483.33	90.00
7.	+कैडमियम 50	466.66	86.66
8.	+कैडमियम 100	483.33	73.33
9.	लेड 200+कैडमियम 0	550.00	96.66
10.	+कैडमियम 25	496.66	86.66
11.	+कैडमियम 50	491.66	80.00
12.	+कैडमियम 100	466.66	73.33
13.	लेड 400+कैडमियम 0	566.66	96.66
14.	+कैडमियम 25	516.66	86.66
15.	+कैडमियम 50	483.33	80.00
16.	+कैडमियम 100	466.66	73.33
CD (at 5%) Cd	के लिए	55.91	36.06
,, ,, Pb	,, ,,	NS	NS
,, ,, Cd × Pb	,, ,,	NS	NS

*प्रत्येक परिणाम तेहरी पुनरावृत्ति का माध्य है ।

NS असार्थक

तथा लेड के कार्बोनेटों को अम्ल की सहायता से घोलकर तथा आसुत जल मिला कर उपयुक्त आयतन मिट्टी में मिलाया गया। कैडमियम तथा लेड को पृथक-पृथक तथा उनके संयोगों के साथ मिट्टी में डाला गया।

इन उपचारित प्लाटों में तीसरी फसल पालक, प्रजाति "वाराणसी", की बुआई 3 ग्राम/प्लाट की दर से जनवरी 1990 में की गयी। प्लाटों को अत्यधिक समांग उर्वर बनाने के लिए पालक बोने के समय NPK की एक मात्रा 40:30:30 किग्रा०/हेक्टेयर के हिसाब से मिट्टी में डाली गयी। पालक की सिंचाई एक सप्ताह के अन्तराल पर स्वच्छ पानी से की गयी। फसल बोने के 75 दिन बाद पौधों को उनकी जड़ों सहित उखाड़ लिया गया और जड़ों तथा तनों का अलग-अलग हरा भार ज्ञात किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में अंकित हैं।

पालक की जड़ों एवं तनों के प्रतिदर्शों को द्विअम्ल के मिश्रण (HNO_3+HClO_4) से पाचित किया गया। तत्पश्चात् निष्कर्षों में Cd, Fb, Fe, Zn एवं Mn का सान्द्रण ज्ञात करने के लिए एटामिक एब्जार्प्सन स्पेक्ट्रो-फोटोमीटर (AAS) द्वारा विश्लेषण पूरा किया गया। AAS सुविधा उपलब्ध कराने के लिए हम केन्द्रीय मत्स्य प्रग्रहण शोध संस्थान, बैरकपुर (प० बंगाल) के आभारी हैं। प्राप्त परिणाम सारणी 2 तथा 3 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

पौधों तथा जड़ों का भार

सारणी-1 के अवलोकन से स्पष्ट हो जाता है कि नियन्त्रण की तुलना में कैडमियम की सर्वोच्च मात्रा (100 ppm) डालने से पौधों के भार में 27.78% तथा जड़ों के भार में 26.66% की कमी आयी। लेड की सर्वोच्च मात्रा (400 ppm) डालने से पौधों तथा जड़ों के भार में यह कमी क्रमशः 5.55% तथा 3.33% ही देखी गयी। दोनों प्रदूषकों की अन्योन्य क्रिया के फलस्वरूप पौधों तथा जड़ों के भार में कोई विशेष परिवर्तन नहीं पाया गया।

सांख्यिकीय विश्लेषण आंकड़ों से ज्ञात होता है कि केवल अवशिष्ट कैडमियम ही पौधों तथा जड़ों के भार में सार्थकता स्तर पर कमी ला सका जबकि अवशिष्ट लेड पौधों तथा जड़ों के भार पर पूर्णतया निष्प्रभावी रहा। साथ ही अवशिष्ट कैडमियम × लेड अन्योन्य क्रिया का भी पौधों तथा जड़ों के भार पर कोई सार्थक प्रभाव नहीं पड़ा।

कैडमियम व लेड का प्रभाव पालक की उपज (पौधों तथा जड़ों के भार) पर इससे पूर्व उगायी गयी मक्का या शलजम फसल की तुलना में कम हानिकारक पाया गया। इससे स्पष्ट है कि केवल कैडमियम का हानिकारक प्रभाव अभी भी तीसरी फसल की उपज पर पड़ रहा है जबकि लेड का प्रभाव अकेले या कैडमियम के साथ समाप्त कर चुका है। डहिया आदि ने[2] भी मक्का की उपज पर कैडमियम का अधिक हानिकारक प्रभाव देखा है।

सारणी 2

Cd × Pb अन्योन्य क्रिया का उनके पालक द्वारा अवशोषण पर प्रभाव*

उपचार संख्या	उपचार (मिग्रा०/किग्रा०)	पालक में प्रदूषकों का सान्द्रण (मिग्रा०/किग्रा०) जड़ों में		तनों में	
		Cd	Pb	Cd	Pb
1.	लेड 0+कैडमियम 0	0.14	0.22	0.05	0.02
2.	+कैडमियम 25	3.05	0.34	1.05	0.16
3.	+कैडमियम 50	4.62	0.36	1.26	0.19
4.	+कैडमियम 100	12.13	0.86	4.05	0.45
5.	लेड 100+कैडमियम 0	0.16	3·11	0.12	1.15
6.	+कैडमियम 25	4.65	3.73	1.30	1.18
7.	+कैडमियम 50	4.65	4.15	1.36	1.80
8.	+कैडमियम 100	12.15	5.18	4.01	2.00
9.	लेड 200+कैडमियम 0	0.26	5.20	0.77	2.12
10.	+कैडमियम 25	4.88	5.93	1.46	2.10
11.	+कैडमियम 50	5.49	6.28	2.03	2.71
12.	+कैडमियम 100	13.49	7.69	4.80	2.93
13.	लेड 400+कैडमियम 0	0.39	8.11	0.23	3.04
14.	+कैडमियम 25	5.08	8.65	1.81	3.31
15.	+कैडमियम 50	6.10	9.00	2.46	3.58
16.	+कैडमियम 100	15.98	11.00	5.11	4.51

*प्रत्येक परिणाम दोहरी पुनरावृत्ति का माध्य है।

सारणी 3

अन्योन्य क्रिया का पालक द्वारा भारी धातुओं के अवशोषण पर प्रभाव*

उपचार संख्या	उपचार (मिग्रा०/किग्रा०)	पालक में भारी धातुओं का सान्द्रण (मिग्रा०/किग्रा०) जड़ों में			तनों में		
		Fe	Zn	Mn	Fe	Zn	Mn
1.	लेड 0+कैडमियम 0	621.29	163.14	159·00	413.00	105.26	105.21
2.	+कैडमियम 25	620.11	161.24	158.26	411.31	103.48	104.13
3.	+कैडमियम 50	605.39	143.26	147.50	401·02	102.99	104.24
4.	+कैडमियम 100	584.66	114.14	118.21	383.11	73.45	86.00
5.	लेड 100+कैडमियम 0	620.30	164.00	158.41	411.21	104.29	104.83
6.	+कैडमियम 25	619.87	160.67	156.24	409.87	101.00	102.31
7.	+कैडमियम 50	600.08	141.10	146.98	389.26	83.24	93.66
8.	+कैडमियम 100	582.37	111.28	115.23	368.16	55.77	68.84
9.	लेड 200+कैडमियम 0	601.49	157.36	155.38	396.55	99.25	102.99
10.	+कैडमियम 25	598.34	139.21	141.77	391.22	85.00	89.67
11.	+कैडमियम 50	576.00	102.37	105.83	371.48	54.12	61.89
12.	+कैडमियम 100	534.11	89.00	99.83	333.50	39.44	49.00
13.	लेड 400+कैडमियम 0	600.21	157.38	154.42	395.06	98.08	100.43
14.	+कैडमियम 25	601.02	155.89	153.76	388.45	86.37	80.77
15.	+कैडमियम 50	541.77	94.39	99.00	311.88	47.99	59.11
16.	+कैडमियम 100	503.24	79.33	84.33	292.77	35.11	40.78

*प्रत्येक परिणाम दोहरी पुनरावृत्ति का माध्य है ।

कैडमियम तथा लेड का अवशोषण

सारणी-2 से स्पष्ट है कि पालक की जड़ों एवं तनों द्वारा कैडमियम एवं लेड का अवशोषण इससे पूर्व बोई गयी मक्का या शलजम फसलों की अपेक्षा कम हुआ। केवल एक तिहाई कैडमियम अथवा लेड ही पालक की जड़ों के तनों की ओर स्थानान्तरित हो पाया। फिर भी पालक की जड़ों व तनों में कैडमियम का सान्द्रण लेड की अपेक्षा अधिक पाया गया। क्रीटोन ने अपने प्रयोग में पाया है कि लेड की अत्यधिक मात्रा पहली फसल या उसके कुछ दिन बाद मिट्टी में स्थिरीकृत हो जाती है जिससे बाद की फसलों द्वारा लेड कम अवशोषित किया जाता है।

सारणी-2 से यह भी स्पष्ट है कि कैडमियम एवं लेड की निम्न मात्राएँ (25 ppm Cd, 100 ppm Pb) अलग-अलग या संयोगों के साथ होने पर पालक द्वारा उनके अवशोषण पर कोई उल्लेखनीय प्रभाव नहीं डाल सकीं। परन्तु कैडमियम एवं लेड की उच्च मात्राओं (Cd 50, Cd 100, Pb 200 व Pb 400) होने से उनके अलग-अलग अवशोषण में वृद्धि हुई। इसी तरह उनसे संयोगों से पालक द्वारा उनके अवशोषण पर योगवाही प्रभाव पड़ा।

अन्य भारी धातुओं का अवशोषण

सारणी-3 में दिये गये परिणामों से पुष्टि होती है कि अवशिष्ट कैडमियम एवं लेड पालक द्वारा आयरन (Fe), जिंक (Zn) तथा मैंगनीज (Mn) के अवशोषण पर अवरोधी प्रभाव (Inhibitory effect) डाला तो किन्तु इससे पूर्व उगायी गयी मक्का या शलजम फसल की तुलना में यह प्रभाव कम था। जिंक का अवशोषण सबसे अधिक और आयरन का सबसे कम प्रभावित हुआ।

उल्लेखनीय है कि केवल 44 प्रतिशत जिंक, 48 प्रतिशत मैंगनीज तथा 58 प्रतिशत आयरन पालक की जड़ों से तनों में स्थानान्तरित हो पाया।

कैडमियम × लेड (Cd 25 ppm तथा Pb 100 ppm) द्वारा उपचारित प्रक्षेत्रों में से पालक द्वारा Fe, Zn एवं Mn के अवशोषण पर कोई सार्थक प्रभाव नहीं पाया गया जबकि Cd 50 × Pb 200 के साथ अत्यल्प प्रभाव प्रदर्शित हुआ। सबसे अधिक प्रभाव तो Cd 100 × Pb 400 के साथ देखा गया।

अन्य भारी धातुओं के अवशोषण पर लेड ने कैडमियम की अपेक्षा कम प्रतिरोधी प्रभाव प्रदर्शित किया लेकिन संयुक्त प्रतिरोधी प्रभाव पृथक-पृथक प्रभाव की अपेक्षा अधिक अस्पष्ट था। मिश्रा एवं शुक्ला ने[5,6] मक्का पर किये गये प्रयोग में पाया है कि कैडमियम व लेड ने अन्य सूक्ष्म पोषक तत्वों (Fe, Zn व Mn) के अवशोषण को कम कर दिया। लेड से कैडमियम अधिक प्रभावकारी दृष्टिगोचर हुआ।

इस प्रयोग के आधार पर यह निष्कर्ष निकलता है कि Cd तथा Pb की उपस्थिति में अन्य भारी धातु प्रदूषकों का शोषण कम होता है।

निर्देश

1. क्रीटोन, सी० एम०, J. Environ. Qual. 1937, 6, 358-368.
2. इहिया, एस० एस०, गोयल, एस० तथा सिंह, ए०, Proc. of Sym. at Haryana Agril. Univ. Hissar, 1984, 115.
3. जोन, एम० के०, J. Environ. Pollut., 1976, 11, 85-95.
4. मोर्टवेट, जे० जे०, Agron. Abstr. Dec. 3, 1978.
5. मिश्रा, एस० जी० तथा शुक्ला, पी० के०, Paper in Sym. at Rae Bareli, Feb., 23-24, 1991.
6. मिश्रा, एस० जी० तथा शुक्ला, पी० के०, Paper presented in Sym. at N. D. Agri. Univ. Faizabad, March, 13-14, 1991.
7. हासेट, जे० जे०, मिलर, जे० ई० तथा कापे, डी० ई०, J. Environ. Pollut., 1976, 11, 297-302.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

शुद्ध नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव का अध्ययन : काल प्रभावन का प्रभाव

जगदीश प्रसाद*

रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[प्राप्त—अक्टूबर 1, 1990]

सारांश

ओजोनित्र, अर्ध-ओजोनित्र तथा स्लीव उत्तेजनों के अन्तर्गत विगैसित पात्रों में पारद-वाष्प-मुक्त नाइट्रोजन गैस में जोशी प्रभाव Δi का अध्ययन किया गया। तीनों ही नलियों में काल-प्रभावन के द्वारा देहली-विभव V_m का पर्याप्त मात्रा में ह्रास प्रेक्षित हुआ। यह भी पाया गया कि नलियों में विसर्जन की कुछ क्षणदीप्ति प्रवाहित होने पर ही Δi का प्रेक्षण होता है। इससे प्रतीत होता है कि Δi की उत्पत्ति के लिए जोशी-तल के कार्य-फलन में अवनमन होना परम आवश्यक है। प्राप्त परिणामों की व्याख्या इस प्रभाव के लिए प्रदत्त जोशी-सिद्धान्त तथा एक अभिगृहीत के आधार पर की गयी है।

Abstract

Studies of Joshi effect in pure nitrogen : Influence of ageing. *By* Jagdish Prasad*, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Joshi effect Δi has been studied in mercury vapour free nitrogen in degassed vessels under ozonizer, semi-ozonizer and sleeve excitation. In all the three tubes ageing was found to have decreased the threshold potential V_m appreciably. It was also observed that Δi could only be observed after a few flashes due to discharge had passed across the tubes. This suggests that a lowering in work function of the Joshi layer is essential for the inception of Δi. The results have been explained on the basis of Joshi theory for the phenomenon Δi with an additional postulate.

नाइट्रोजन की इलेक्ट्रॉन-बन्धुता (−0.6 eV[1]) ऋणात्मक होने के कारण यह एक इलेक्ट्रॉन असंलगनक गैस है। जोशी[2,3] के अनुसार $-\Delta i$, किरणन के अन्तर्गत मन्द गति वाले ऋण आयनों

* Present Mailing Address : 115, Krishna Puri, Meerut-250002.

द्वारा निर्मित अन्तराकाशी आवेश का प्रतिफल होता है। इलेक्ट्रॉन-मुक्त गैसों में Δi की व्याख्या के लिए जोशी[4] का विचार है कि इलेक्ट्रॉनों का बहुत अधिक उत्सर्जन स्वयं ही अन्तराकाशी आवेश-प्रभाव के कारण, विशेषतः तब जब इलेक्ट्रॉनों की गति मन्द होती है, धारा में ह्रास उत्पन्न कर सकता है। प्रस्तुत प्रपत्र में इस बात का अन्वेषण करने का प्रयत्न किया गया है कि क्या पारद-वाष्प-मुक्त शुद्ध नाइट्रोजन गैस में $-\Delta i$ का प्रेक्षण सम्भव है।

प्रयोगात्मक

उपकरण का सामान्य समुच्चय तथा प्रयुक्त विद्युत्-परिपथ पूर्वप्रकाशित[5] जैसे थे। मर्क-शुद्धि के सोडियम नाइट्राइट तथा अमोनियम क्लोराइड के मिश्रण के उष्मीय अपघटन से नाइट्रोजन गैस को प्राप्त किया गया। सम्भावित अपद्रव्यों को दूर करने के लिए गैस को अम्ल युक्त $FeSO_4$,$K_2Cr_2O_7$, ऐसीटिक अम्ल तथा क्षारीय पाइरोगैलोल विलयनों में प्रवाहित किया गया। $CaCl_2$, KOH तथा P_2O_5 द्वारा शुष्क की गयी गैस को 400°C के पालिशकृत Cu-रेतन पर प्रवाहित किया गया। अन्धकार में i_D तथा 200 वाट 220 वोल्ट के काँच-लैंप द्वारा किरणन के अन्तर्गत i_L विसर्जव धारा को परावर्तन-धारामापी द्वारा मापा गया। आपेक्षिक जोशी प्रभाव $\%\Delta i = 100 \times \Delta i / i_D$, जबकि $\Delta i = (i_L - i_D)$।

परिणाम तथा विवेचना

ओजोनित्र-उत्तेजन

V_m पर ही $-\Delta i$ का प्रेक्षण हुआ। V_m से आगे अनुप्रयुक्त V को बढ़ाने पर $-\%\Delta i$ घटता गया। एक महत्वपूर्ण प्रेक्षण यह था कि जब नली को प्रथम बार किरणित किया गया तब किसी Δi का प्रेक्षण नहीं हुआ। तथापि, किरणन को बन्द करके, 5 सेकण्ड बाद जब नली को पुनः किरणित किया गया तो $-6\% \Delta i$ का प्रेक्षण हुआ। अर्ध-ओजोनित्र तथा स्लीव-नली में भी इसी प्रकार के प्रेक्षण प्राप्त हुए। 'नए' तथा विगैसित ओजोनित्र में जो धारा परिवर्ती थी वह कुछ मिनटों के बाद काल-प्रभावन से अपरिवर्ती हो गयी। काल-प्रभावन ने V_m का लगभग 8% (0.78 से 0.72 kV) अवनमन कर दिया। काल के अनुसार i_D में कोई उल्लेखनीय परिवर्तन नहीं हुआ, जबकि i_L में महत्वपूर्ण ह्रास हुआ। V_m पर 90 मिनट के काल-प्रभावन से $-\% \Delta i$ 6 से 30 तक बढ़ गया, जो अगले 3 घन्टों के काल-प्रभावन से बढ़कर 60 हो गया। धारा i के ओसिलोग्राफी अध्ययनों से पता लगा कि काल-प्रभावन ने एच० एफ० स्पन्दों को पर्याप्त बढ़ा दिया। धनात्मक तथा ऋणात्मक अर्धखंडों में धारा-संरचना लगभग सर्वसम थी। ओजोनित्र को किरणित करने पर स्पन्दों के आयाम घट गये किन्तु उनकी संख्या बढ़ गयी, जो $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ के सह-अस्तित्व का द्योतक है।

अर्ध-ओजोनित्र-उत्तेजन

दीप्ति Pt तार पर केन्द्रित थी। काल-प्रभावन से V_m लगभग 9% (0.67 से 0.61 kV) घट गया। V_m पर काल-प्रभावन से 90 मिनट में $-\%\Delta i$ 4 से बढ़कर 63 हो गया, अगले 3 घन्टों के

काल-प्रभावन ने इसे बढ़ाकर 85 कर दिया। साइन-वक्र के दो अर्धखन्डों में धारा-संरचना असमान थी। धनात्मक अर्धखन्ड में विभिन्न आयामों वाले अनेक एच० एफ० स्पन्द पाये गये, जब कि ऋणात्मक अर्धखण्ड में केवल एक ही स्पन्द था। धनात्मक अर्धखण्ड में किरणन ने एच० एफ० स्पन्दों के आयामों को तो घटा दिया किन्तु उनकी संख्या को बढ़ा दिया।

स्लीव-उत्तेजन

दोनों स्लीवों के बीच में दीप्ति एकसमान वितरित थी। ऐसा प्रतीत हुआ कि नली की दीवार के सहारे विसर्जन हो रहा था। काल-प्रभावन से V_m लगभग 2% (2.16 से 2.11 kV) घट गया। V_m पर 90 मिनट के काल-प्रभावन ने $-\% \Delta i$ को 3 से 33 तक बढ़ा दिया। धनात्मक तथा ऋणात्मक अर्धखन्डों में धारासंरचना सर्वसम थी।

विसर्जन के दौरान नली की दीवारों पर आयनों की बमबारी के कारण इलेक्ट्रोडों के कार्य-फलन में ह्रास होने के आधार पर, तीनों नलियों में प्रेक्षित, काल-प्रभावन से V_m में होने वाले अवनमन की व्याख्या की जा सकती है। दीवारें, जो इलेक्ट्रोडों का भी कार्य करती हैं, उनके कार्य-फलन में अवनमन द्वितीयक प्रक्रमों[6] (γ तथा $\eta\theta g$ सदृश) के द्वारा इलेक्ट्रॉनों की मुक्ति में सहायक होता है, जिससे V_m में ह्रास होता है।

यह उल्लेखनीय है कि Δi का प्रेक्षण केवल तब ही हो पाया जब ओजोनित्र में विसर्जन के द्वारा कुछ क्षण दीप्ति उत्पन्न हो चुकी। इसी प्रकार के परिणाम अन्य दोनों नलियों के साथ प्राप्त हुए। विसर्जन के दौरान Δi के परिमाण पर होने वाले इस काल-प्रभावन के उल्लेखनीय प्रभाव पर जोशी[7] ने बल दिया है। उनका अभिगृहीत है कि Δi के प्रेक्षण के लिए मूल प्रतिबन्ध है न्यून कार्य-फलन वाले अधिशोषण-सदृश सीमान्त-तल या जोशी-तल की निर्मिति[2,3]। कुछ ही काल की क्षणदीप्तियों का Δi को निर्माण कर सकना प्रकट करता है कि वे 'नए' इलेक्ट्रोड जो बाह्य प्रकाश के प्रति संवेदनशील नहीं थे, विसर्जन के दौरान आयनों की बमबारी से प्रकाश-संवेदनशील हो गये। इन क्षणदीप्तियों के द्वारा उत्पन्न श्लथ-बद्ध इलेक्ट्रॉनों के अवशेष इलेक्ट्रोडों की प्रकाश-संवेदनशीलता को बढ़ा देते हैं। इससे मुख्य उत्सर्जन अत: Δi बढ़ जाता है। वह काल-प्रभावन जो इलेक्ट्रोड के कार्य-फलन को घटाता है परिणामत: प्रकाश-इलेक्ट्रॉन-उत्सर्जन को बढ़ाता है, उसने $-\Delta i$ को बढ़ाकर 6 से 60 कर दिया। अर्ध-ओजोनित्र तथा स्लीव उत्तेजनों में भी इसी कारण वृद्धि प्रेक्षित हुई है।

पूर्वप्रकाशन[8] के अनुसार, 'नए' ओजोनित्र में Δi का परिमाण अल्प होता है, जो काल-प्रभावन से बढ़ जाता है। नये निर्मित ओजोनित्र में विसर्जन के दौरान Δi का वर्धमान विकास प्रथम कोटि की अभिक्रिया के लिए समीकरण के अनुसार होता है।[9] नये निर्मित ओजोनित्र को क्लोरीन के सम्पर्क में पर्याप्त समय तक रखने मात्र से Δi का प्रेक्षण नहीं होता है।[10] इससे सिद्ध होता है कि Δi की उत्पत्ति के लिए विसर्जन के दौरान शोषण परम आवश्यक है। उन्होंने यह भी देखा कि वायु में Δi का परिमाण अल्प था, किन्तु विसर्जन के दौरान ओजोनित्र को क्लोरीन के साथ पूर्वतापित करने से उच्च Δi का

प्रेक्षण हुआ ।[10] इसका कारण विसर्जन के दौरान क्लोरीन का शोषण है। प्रस्तुत अन्वेषण में प्राप्त परिणामों से पता लगता है कि विसर्जन के दौरान शोषण के साथ-साथ, विसर्जन के कारण इलेक्ट्रोडों के कार्य-फलन में ह्रास होने के कारण, मुख्य प्रकाश-इलेक्ट्रॉन-उत्सर्जन बढ़ जाता है, जिससे विसर्जन के दौरान इलेक्ट्रोडों की दीवारों पर इलेक्ट्राँनों का वास्तविक रूप में निक्षेपण होने से $-\Delta i$ में उल्लेखनीय वृद्धि होती है।

ओजोनित्र की तुलना में अर्ध-ओजोनित्र इस दृष्टि से तनिक भिन्न है कि इसमें कम व्यास का धातु का एक तार इसके आन्तरिक इलेक्ट्रोड का कार्य करता है। इस प्रकार की नली में क्षेत्र इस आंतरिक तार के समीप केन्द्रित होता है। प्रबल क्षेत्र से निर्बल क्षेत्र में गति करने वाला इलेक्ट्रॉन प्रबल क्षेत्र में आयन-युग्मों को उत्पन्न करता है और निर्बल क्षेत्र परिसर में अपेक्षा से अधिक।[11] मोर्टन[12] ने पता लगाया है कि आयनीकरण-गुणांक के आधार पर परिकलित धारा की तुलना में असमान क्षेत्र में आयन-युग्मों का योग अतः धारा का मान अधिक होता है। मेज[13] ने ग्रेफाइट-विलेपित काँच-कैथोड-गणित्र का जो प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त अर्ध-ओजोनित्र से मिलता-जुलता है, प्रयोग किया। इस प्रकार की नली का व्यवहार ऐसा होता हैं जैसे कि भू-सम्पर्कित बाह्य लेप के प्रति उच्च प्रतिरोध तथा एक समान्तर धारिता के द्वारा आन्तरिक काँच-तल एक चालक कैथोड हो।[13]

मुक्त इलेक्ट्रॉनों को ऋण आयनों का सरलतम रूप माना जा सकता है; ये इलेक्ट्रॉन, विशेषतः तब जब इनकी गति मन्द होती है—जैसे अनुप्रयुक्त निम्न विभवों पर, अन्तराकाशी आवेश-प्रभाव के कारण, धारा में ह्रास $-\Delta i$ उत्पन्न कर सकते हैं।[4] V_m के अत्यन्त समीप $-\Delta i$ के अधिकतम होने की इससे व्याख्या सम्भव है।

आधुनिक निर्वात-तकनीक को प्रयुक्त करके, अपद्रव्यों की उपस्थिति का निराकरण करते हुए, टक्सन[14] ने O^-, O^-_2, NO^-_3, OH^- ऋण आयनों के अस्तित्व का पता लगाया, किन्तु N^-, N^-_2, He^-, A^- ऋण आयनों के अस्तित्व को संसूचित न कर सका। N की इलेक्ट्रॉन-बन्धुता -0.6 eV घोषित की गई है।[1] इलेक्ट्रॉन-बन्धुता का धनात्मक होना ऋण आयन के स्थायित्व का द्योतक है। इसका परिमाण जितना अधिक होता है, ऋण आयन उतना ही अधिक स्थायी होता है। नाइट्रोजन की इलेक्ट्रॉन-बन्धुता के ऋणात्मक होने से ऋण-अन्तराकाशी आवेश के बनने और नली-धारा को घटाने की नाइट्रोजन में सम्भावना नहीं है। अस्तु, नाइट्रोजन में उत्पन्न $-\Delta i$ की बड़े परिमाण में प्रेक्षण की व्याख्या केवल इलेक्ट्रॉन द्वारा निर्मित अन्तराकाशी आवेश के अभिगृहीत पर ही सम्भव है।

नली में विसर्जन के द्वारा कुछ क्षणदीप्ति प्रवाहित होने पर ही Δi का प्रेक्षण होने से इस धारणा की पुष्टि होती है कि Δi के प्रेक्षण के लिए मुख्य उत्सर्जन का बहुत अधिक मात्रा में होना मौलिक आवश्यकता है। V_m के अत्यन्त समीप के विभव पर अधिकतम Δi का विद्यमान होना और V के बनने से इसका घटना इस तथ्य के कारण है कि वह इलेक्ट्रॉन-अन्तराकाशी आवेश जो जोशी के अनुसार, किरणन के दौरान धारा में अवनमन उत्पन्न करता है, अनुप्रयुक्त विभव के बढ़ने के साथ उसका क्षय हो जाता है।[7]

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० के० टिक्कू के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है ।

निर्देश

1. मैस्से, एच० एस० डब्ल्यू०, "Negative Ions", कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1950.
2. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइन्स**, 1946, **15**, 281.
3. जोशी, एस० एस०, **वही**, 1947, **16**, 19.
4. जोशी, एस० एस०, 1957, (व्यक्तिगत प्रेषण)
5. प्रसाद, जे०, **काइनेटिका-आइ-कैटेलिज**, 1977, **18**, 497, **बंगलादेश जर्न० साइंस इंडस्० रिस०**, 1984, **19**, 84.
6. लॉब, एल० बी०, "Fundamental Processess of Electrical Discharge through Gases", जॉनविले, न्यूयार्क, 1939.
7. जोशी, एस० एस०, **प्रोसी० इन्डियन साइन्स कॉंग्रेस**, **अध्यक्षीय भाषण**, रसायन विभाग, 1943, 51.
8. प्रसाद, जे०, **ऐक्टा सिएंसिया इन्डिका**, 1974, **1**, 13.
9. रमनमूर्ति, एम० वी०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1948, **25**, 255.
10. राव, के० वी०, **प्रोसी० इन्डियन एकेड० साइन्स**, 1948, 27, 72.
11. फॉन एन्जिल, ए०, **नूबो सिम०**, 1951, **8**, 42.
12. मोर्टन, पी० एल०, **फिजि० रिव्यू०**, 1951, **70**, 358.
13. मेज, आर०, **जर्न० फिजि० रेडियम**, 1946, **7**, 164.
14. टक्सन, टी०, **जेड० फिजि०**, 1936, **103**, 463.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

जीवाणु द्वारा जल का प्रकाशअपघटनी विखण्डन

कृष्ण बहादुर, एस० रंगनायक तथा शैलजीत सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जुलाई 15, 1991]

सारांश

जीवाणु में नाइट्रोजन तथा कार्बन डाइ आक्साइड को स्थिर करने एवं जल अणु को विखण्डित करने की क्षमता पाई गई। यह जल विखण्डन प्रकाशजैविक जैसा है।

Abstract

Photolytic splitting of water by Jeewanu. *By* Krishna Bahadur, S. Ranganayaki and Shail Jeet Singh, Chemistry Department, Allahabad University.

Jeewanu, the protocells synthesised by the action of light on sterilised aqueous mixtures of ammonium molybdate, diammonium hydrogen phosphate, biological mineral and formaldehyde have many of the biochemicals of the present day cell, have boundary wall with internal structures, materials with ferredoxin-like and nitrogenase-like activity and fix molecular nitrogen and carbon dioxide in sunlight and split water molecule. This splitting of water is photobiological-like.

किसी भी तन्त्र का स्थायित्व उस तन्त्र में से होकर ऊर्जा के प्रवाह के फलस्वरूप बढ़ जाता है। इसी ऊर्जा-प्रवाह से कुछ तन्त्र स्थायी बने और जीवन का सूत्रपात हुआ।

आखिर सबसे अधिक सजीव तन्त्रों में प्रवाहित होने वाली ऊर्जा का स्रोत क्या था? अनेक वैज्ञानिकों का मत है कि यह कार्बनिक पदार्थ था। उनके अनुसार परपोषी (heterotrophs) तथा स्वतोपोषी दो प्रकार के जीव थे जो पर्यावरण में पहले से विद्यमान कार्बनिक अणुओं पर आश्रित थे।[1] यूरे तथा मिलर का सुझाव है[2] कि जीवन के उद्गम के समय पृथ्वी पर प्रचुर कार्बनिक पदार्थ विद्यमान था। तब तो तन्त्र में ऊर्जा-प्रवाह को जैव पदार्थ की ऊर्जा का सदुपयोग समझा जाता था जिससे CO_2 तथा H_2O उत्पन्न होते थे।

किन्तु अब विश्वास किया जाने लगा है कि जीवन की उत्पत्ति पृथ्वी के गौण वायुमण्डल में हुई जिसमें नाइट्रोजन, कार्बन डाइ आक्साइड तथा जल वाष्प मुख्य घटकों के रूप में थे[3] और समुद्र में अत्यल्प कार्बनिक पदार्थ था। सिलेन ने[4] गणना के बाद यह निष्कर्ष निकाला है कि अरबों वर्ष पूर्व सागर में "पतले शोरबे" का बनना सम्भव नहीं था। इस तरह जीवन के उद्‌गम के प्रारम्भ काल से ही सजीव तन्त्रों के लिए ऊर्जा का अभाव था। सजीव तन्त्र ने इसका हल निकाला और जीवन का अस्तित्व हुआ।

'जीवाणु' आदि कोशिकाएँ हैं और कोशिकामय जीवन के पूर्वगामी हैं और निर्बीजित जलीय मिश्रण में सरल कार्बनिक तथा अकार्बनिक पदार्थों पर प्रकाश की क्रिया से संश्लेषित हुए हैं[5]। जीवाणु निर्माण की पुष्टि ब्रिग्स ने इंगलैंड स्थित अपनी प्रयोगशाला में कर दी है[6,7]। अमोनियम मालिब्डेट, डाइ अमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट, जैव खनिज तथा फार्मेल्डिहाइड के निर्वीजित जलीय मिश्रण में प्रकाश की क्रिया से जीवाणु संश्लेषण की सामान्य विधि दी जा चुकी है[8]। इन कणों में परिसीमा भित्ति तथा आन्तरिक संरचना होती है[9]। इनमें वे अनेक जैवरसायन उपस्थित हैं जो आज की कोशिकाओं में पाये जाते हैं और उनका तात्विक विश्लेषण इस प्रकार है[8] 13.87% H. 9.22% N, 39.21% Mo तथा 2.21% P। इनके अतिरिक्त उनमें 0.18% Fe, 0.005% Mn, 0.003% Mg 0.003% K, 0.006% Ca तथा 0.10% Na भी पाया जाता है[10]।

ये कण अन्दर से वृद्धि करते हैं, कलि कायन द्वारा गुणन करते हैं और इनमें उपापचयी सक्रियता पायी जाती है[5,8,10]।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य जीवाणु में फेरेडाक्सिन की उपस्थिति की खोज करना था। फेरेडाक्सिन कई जैवरासायनिक रूपान्तरों में इलेक्ट्रॉन वाहक के रूप में कार्य करता है और समस्त ज्ञात जीव कोशिकाओं में उपस्थित रहता है। सूर्य प्रकाश में जल के प्रकाश जैविक विखण्डन में क्लोरोप्लास्ट-फेरेड़ाक्सिन-हाइड्रोजनेस तन्त्र कार्यशील रहता है।[12–14] जीवाणु में फेरेडाक्सिन जैसा पदार्थ पाया गया। इसकी विशेषता यह है कि प्राकृतिक फेरेडाक्सिनों की तरह प्रकाश या आक्सीजन द्वारा यह विनष्ट नहीं होता।

जीवाणु मिश्रण में प्रकाशरासायनिक उत्क्रमणीय इलेक्ट्रान-स्थानान्तरण देखा जाता है जिसके फलस्वरूप यह मिश्रण मालिब्डनम के एक रूप के कारण प्रकाश में रखने पर नीला हो जाता है किन्तु अँधेरे में लाते ही यह रंगहीन हो जाता है।

यह देखा गया कि यदि जीवाणु तथा जल के मिश्रण को सूर्य प्रकाश में रखा जाय तो 10-15 मिनट बाद बुलबुले उठने लगते हैं। इस गैस को एकत्र किया जा सकता है। (देखें सारणी)

यही नहीं, जीवाणु में नाइट्रोजेनस-सदृश सक्रियता देखी गई। यदि जीवाणु के ऊपर के स्थान में ऐसिटिलीन रखी जाय और मिश्रण को धूप में रखा जाय तो एथिलीन बनती है। जीवाणु में CO_2 को स्थिर करने की क्षमता पाई गई है। फलस्वरूप जब सूर्य प्रकाश में रखे जीवाणु-जलमिश्रण में से होकर

CO_2 प्रवाहित की जाती है तो बाहर निकलने वाली गैस में असन्तृप्त हाइड्रोकार्बन उपस्थित रहते हैं[15]। यदि जीवाणु तथा जल के मिश्रण में से N_2 गैस प्रवाहित की जाय और मिश्रण को प्रकाश में रखा जाय तो नाइट्रोजन का यौगिकीकरण हो जाता है [16,17]।

सारणी

जीवाणु द्वारा जल के विखण्डन से उत्पन्न गैस

परिस्थिति	समय	जल			जीवाणु+जल			
		A	B	C	A	B	C	D
अँधेरा	10.15	12.7	14.6	−1.9	13.7	13.5	+0.2	+2.1
प्रकाश	10.30	13.0	13.8	—0.8	14.6	1.25	+2.1	+2.9
	10.45	14.2	12.9	+1.3	15.5	11.6	+3.9	+2.6
	11.00	14.4	12.6	+1·8	15.9	11.1	+4.8	+3.0
	11.15	14.4	12.6	+1.8	15.9	11.1	+4.8	+3.0
अँधेरा	11.25	13.8	13.3	+0.5	15.3	11.9	+3.4	+2.9
	11.35	13.6	13.6	+0.0	15.0	12.2	+2.8	+2.8
	11.45	13.5	13.8	−0.3	14.8	12.3	+2.5	+2.8
प्रकाश	12.00	14.3	12.7	+1.6	15.6	11.5	+4.1	+2.5
	12.15	14.7	12.2	+2.5	16.1	10.9	+5.2	+2.7
	12.30	14.8	12.1	+2.7	16.3	10.7	+5.6	+2.9
	12.45	14.9	12.0	+2.9	16.5	12.6	+5.9	+3.0
अँधेरा	12.55	14.2	10.2	+1.0	15.6	11·6	+4.0	+3.0
	8.05	13.9	13.3	+0.6	15.3	18.8	+3.5	+2.9
	1.15	13.7	13.4	+0.3	15.1	12.1	+3.0	+2.7
प्रकाश	1.30	14.6	12.3	+2.3	15.9	11.2	+4.7	+2.4
	1.45	14.8	12.1	+2.7	10.2	10.2	+0.6	−3.3
	2.00	15.0	12.0	+3.0	16.4	10.6	+5.8	+2.8
	2.15	15.0	12.0	+3.0	16.4	10.6	+5.8	+2.8

अँधेरा								
	2.25	14.2	12.8	+1.4	15.6	11.5	+4.1	+2.7
	2.35	13.9	13.2	+0.7	15.4	11.8	+3.6	+2.9
	2.45	13.8	13.3	+0.5	15.2	11.9	+3.3	+2.8
प्रकाश								
	3.00	14.9	11.9	+3.0	16.5	10.6	+5.9	+2.9
	3.15	14.9	11.9	+3.0	16.3	10.3	+6.4	+3.4
	3.30	15.1	11.7	+3.4	16.9	10.2	+6.7	+3.3
	3.45	15.3	11.4	+3.9	17.0	10.0	+7.0	+3.1
अँधेरा								
	3.55	14.3	12.6	+1.7	15.9	11.1	+4.8	+3.1
	4.05	13.9	13.1	+0.8	15.3	11.7	+3.6	+2.8
	4.15	13.7	13.3	+0.4	14.9	12.0	+3.1	+2.7
	4.25	13.6	13.4	+0.2	14.9	12.0	+2.9	+2.7

परिस्थिति	समय	जीवाणु+पायरोगैलाल			
		A	B	C	D
अँधेरा					
	10.15	10.3	16.3	−6.0	−4.1
प्रकाश					
	10.30	11.5	14.3	−2.8	−2.0
	10.45	12.1	13.3	−1.2	−2.5
	11.00	12.3	12.9	−0.6	−2.4
	11.15	12.3	12.9	−0.6	−2.4
अँधेरा					
	11.25	11.3	14.7	−3.4	−3.9
	11.35	11.0	15.1	−4.1	−4.1
	11.45	11.0	15.1	−4.1	−3.8
प्रकाश					
	12.00	11.9	13.4	−1.5	−3.1
	12.15	12.3	12.8	−0.5	−3.0
	12.30	12.4	12.7	−0.3	−3.0
	12.45	12.5	12.7	−0.2	−3.1

अँधेरा					
	12.55	11.5	14.5	−3.0	−4.0
	1.05	11.2	1S.8	−3.6	−3.9
	1.15	11.2	84.8	−3.6	−3.9
प्रकाश					
	1.30	12.1	13.2	−1.1	−3.9
	1.45	12.3	13.0	−0.7	−3.4
	2.00	12.4	12.8	−0.4	−3.4
	2.15	12.4	82.8	−0.4	−3.4
अँधेरा					
	2.25	11.7	14.2	−2.5	−3.4
	2.35	11.5	14·4	−2.9	−3.6
	2.45	11.1	14.8	−3.7	−4.2
प्रकाश					
	3.00	12.4	12.8	−0.4	−3.4
	3.15	12.6	12.6	−0.0	−3.0
	3.30	12.8	11.2	+0.6	−2.8
	3.45	12.8	12.0	+0.8	−3.1
अँधेरा					
	3.55	11.8	13.8	−2.0	−1.9
	4.05	11.5	12.4	−0.9	−4.2
	4.15	11.1	14.9	−3.8	−1.7
	4.25	11.0	15.0	−3.9	−4.1

सारणी के संकेत

A=मैनोमीटर की रीडिंग-खुली भुजा में, सेमी॰ पारद

B=बारबुर्ग फ्लास्क से संयुक्त भुजा में मैनोमीटर रीडिंग, सेमी॰ पारद

C=बारबुर्ग के फ्लास्क में दाब—सेमी॰ पारद

D=बारबुर्ग फ्लास्क में दाब—सेमी॰ पारद (जल अन्य फ्लास्क में रखे जल के दाब की रीडिंग कोघटाकर प्राप्त)।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० एस० जे० सिंह आर्थिक सहाय्य के लिए सी० एस०आई० आर०, नई दिल्ली काआभारी हैं।

निर्देश

1. ओपेरिन, ए० आई०, In : The Origin of Life. J. D. Bernel, Cleveland : World 1967/1924.
2. हाल्डेन, जे० बी० एस०, In : The Origin of Life. J. D. Bernel. Ed., pp. 243-51, Cleveland : World. (1967/1928).
3. एबलसन, पी० एच०, Proc. Nat. Acad. Sci. V. S., 1966 **55**, 1365.
4. सिलेन, एल० जी०, Arkiv. Kemi., 1965, **24**, 431.
5. बहादुर, के० इत्यादि, Zbl. Bakt. 1964, **117**, (2), 567-602.
6. ब्रिग्स, एम० एच०, Fourth International Conference on Photobiology, Aug. 1964, Oxford.
7. वही, Spaceflight 1965, 7(4), 129-131.
8. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस०, J. Brit. Interplanetary Soc. 1970, **23**, 813-829.
9. सिंह, वाई० पी०,D. Phil. Thesis, Chemistry Department, Univ. Allahabad, India (1975).
10. हफमैन, डब्लू० डी० Huffman Laboratories Inc. (1980), Lab. No. 11127901, Dec. 7, 1979.
11. बहादुर, के० रंगनायकी, एस० कुमार, ए० तथा श्रीवास्तव, पी०, Zbl. Bakt., 1966, **120**(2) 740-752.
12. बेहेमान, जे० आर०, बेरेन्सन, जे० ए०, कैप्लान, एन० ओ० तथा कामेन, एम० डी०, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1973, **70**, 2317-2320.
13. राव, के० के०, रोसा, एल० तथा हाल, डी० ओ०, Bochem. Biophys. Res. Comm., 1976, **68**, 21-27.
14. फ्राई, आई०, पापेनेनोगिड, जी०, टेल ओर, ई० तथा पैकर, एल० Z. Nature forsch., 1977 **32C**, 110-117.
15. रंगनायकी, एस०, सजल कुमार तथा बहादुर, के०, J. Brit. Interplanetary Soc. 1981, **34**, 251-54.
16. गुप्ता, वी० के०, D. Phil. Thesis, Chemistry Dept., Univ. Allahabab, India (1980).
17. वर्मा, पी० के० D. Phil. Thesis, Chemistry Dept., Univ. Allahabad, India (1980).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

बेसेल फलनों तथा जैकोबी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन के द्वि-विमीय प्रसार का एक नवीन वर्ग

एस० डी० बाजपेयी
गणित विभाग, बहरीन विश्वविद्यालय,
ईसा टाउन, बहरीन

[प्राप्त—अगस्त 18, 1990]

सारांश

इस प्रपत्र में बेसेल फलनों तथा जैकोबी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन के द्विविमीय प्रसार का एक नवीन वर्ग प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

A new class of two-dimensional expansion of Meijer's G-function involving Bessel functions and Jacobi polynomials. *By* S.D. Bajpai, Department of Mathematics, University of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain

In this paper, we present a new class of two-dimensional expansion of Meijer's G-function involving Bessel functions and Jacobi polynomials.

1. प्रस्तावना—प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य बेसेल फलनों तथा जैकोबी बहुपदों वाले माइजर के G-फलन [3 pp. 206-222] के द्विविमीय प्रसार के लिए एक नया वर्ग प्रवर्तित करना एवं इस वर्ग के एक द्वि-विमीय प्रसार को प्रस्तुत करना है।

उपपत्ति में निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी—

समाकल [1, p. 177, (2.1)] :

$$\int_{-1}^{1}(1-y)^{\sigma}(1+y)^{\beta}\, P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(y)\; G_{p,q}^{m,n}\left[z(1-y)^{\lambda}\,\Big|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]dy$$

$$=\frac{2^{\beta+\sigma+1}\Gamma(\beta+\nu+1)}{\lambda^{\beta+1}\nu!}G^{m+\lambda,n+\lambda}_{p+2\lambda,q+2\lambda}\left[z2\lambda\left|\begin{matrix}\Delta(\lambda,-\sigma),a_p,\Delta(\lambda,a-\sigma)\\ \Delta(\lambda,a-\sigma+\nu),b_q,\Delta(\lambda,-1-\beta-\sigma-\nu)\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ λ धन पूर्णांक है, (1.1)

$$2(m+n)>p+q,\ |\arg z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,\ Re\beta>-1,$$

$$Re(\rho+\lambda b_j)>-1(j=1,\ldots,m).$$

पूर्णांक [2,p. 285, (2·1)] :

$$\int_0^\infty e^{ix}x^\rho J_\nu(x)\, G^{m,n}_{p,q}\left[zx^\delta\left|\begin{matrix}a_p\\ q_q\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{e^{1/2i(\rho+\nu+1)\pi}(2\pi)^{1/2(1-\delta)}}{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\nu+1}\delta^{-\rho}}\ G^{m+\delta,\,n+\delta}_{p+2\delta,q+\delta}\left[z\left(\frac{\delta e^{\pi i/2}}{2}\right)^\delta\left|\begin{matrix}\Delta(\delta,-\rho-\nu),a_p,\Delta(\delta,\nu-\rho)\\ \Delta(\delta,-\rho-\frac{1}{2}),b_q\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ δ धन पूर्णांक है, (1.2)

$$p+q<2(m+n),\ |\arg z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$$

$$Re(\rho+\nu+\delta b_j)>-1(j=1,\ldots,m),$$

$$Re(\rho+\delta(a_j-1))<-\tfrac{1}{2}(j=1,\ldots,n).$$

जैकोबी बहुपदों [4, p. 285, (5) एवं (9)] का लाम्बिकता गुण

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx$$

$=0$, यदि $m\neq n$, (1.3)

$=\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$, यदि $m=n$;

जहाँ

$$Re\ \alpha>-1,\ Re\ \beta>-1.$$

बेसेल फलनों का लाम्बिकता गुण [5, p. 291, (6)] :

$$\int_0^\infty x^{-1}\ J_{\nu+2n+1}(x)\ J_{\nu+2n+1}(x)dx$$

$$=\begin{cases}0, \text{ यदि } m\neq n,\\ (4n+2\nu+2)^{-1}, \text{ यदि } m=n,\ Re\ \nu+m+n>-1.\end{cases}\quad (1.4)$$

2. द्वि-विमीय प्रसार

जिस द्वि-विमीय प्रसार की स्थापना की जानी है वह है—

$$e^{ix}x^{\rho}(1-y)^{\sigma}G^{m,n}_{p,q}\left[zx^{\delta}(1-y)^{\lambda}\left|\begin{matrix}a_p\\b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{2^{1-\rho+\sigma}(\pi)^{1/2(1-\delta)}}{\Gamma(\frac{1}{2})\delta^{1-\rho}\lambda^{1+\beta}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}e^{1/2i(\rho+v+2r+1)\pi}\frac{(v+2r+1)(\alpha+\beta+2t+1)\Gamma(\alpha+\beta+t+1)}{\Gamma(\alpha+t+1)}$$

$$J_{v+2r+1}(x)\ P_t^{(\alpha,\beta)}(y)$$

$$\times G^{m+\delta+\lambda,n+\delta+\lambda}_{p+2\delta+2\lambda,q+\delta+2\lambda}\left[z\left(\frac{\delta e^{i/2}}{2}\right)^{\delta}2^{\lambda}\left|\begin{matrix}\triangle(\delta,-\rho-v-2r),\triangle(\lambda,-\alpha-\sigma),a_p,\\\triangle(\delta,2-\rho+v+2r),\triangle(\lambda,-\sigma)\\\triangle(\delta,\frac{1}{2}-\rho),\triangle(\lambda,t-\sigma),b_q,\\\triangle(\lambda,-1-\alpha-\beta-\sigma-t)\end{matrix}\right.\right], \quad (2.1)$$

जो (1·1), (1·2), (1·3) एवं (1·4) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

उपपत्ति : माना

$$f(x,y)=e^{ix}x^{\rho}(1-y)^{\sigma}\ G^{m,n}_{p,q}\left[zx^{\delta}(1-y)^{\lambda}\left|\begin{matrix}a_p\\b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}C_{r,t}J_{v+2r+1}(x)\,P_t^{(\alpha,\beta)}(y). \quad (2.2)$$

समीकरण (2.2) वैध है क्योंकि $f(x,y)$ संतत है और क्षेत्र $0<x<\infty, -1<y<1$ में परिबद्ध विचरण वाला है।

(2·2) के दोनों पक्षों में $(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}P_v^{(\alpha,\beta)}(y)$ से गुणा करने तथा -1 से 1 तक y के प्रति समाकलित करने के बाद (1.1) तथा (1.3) का उपयोग करने पर प्राप्त व्यंजक के दोनों पक्ष में $x^{-1}J_{y+2u+1}(x)$ से गुणा करने तथा 0 से ∞ तक x के प्रति समाकलन करने के बाद (1.2) एवं (1.4) का उपयोग करने पर हमें $C_{r,t}$ का मान प्राप्त होता है। अब (2.2) में $C_{r,t}$ का मान रखने पर प्रसार (2.1) प्राप्त हो जाता हैं।

टिप्पणी :

उपर्युक्त विधि का सम्प्रयोग करने पर हम (1.1) तथा (1.2) की सहायता से इसी श्रेणी के दो विमीय प्रसारों के तीन अन्य रूप प्राप्त कर सकते हैं।

निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी०, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 1968, 11** (3), 177-191
2. वही, Proc. Indian Acad. Sci., 1968, **68A**, 285-290.
3. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग 1, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
4. वही, Tables of Integral Transforms, भाग 2, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
5. ल्यूक, वाई०एल०, Integrals of Bessel functions. मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

2-दूरीक समष्टि में संकुचनीय पुनरावृत्तिकधारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु

विजयेन्द्र कुमार, सुचरिता रंगानाथन तथा श्यामलाल सिंह
गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार

[प्राप्त—अक्टूबर 28, 1990]

सारांश

इस प्रपत्र में 2-दूरीक समष्टि पर एक स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किया गया है जो सहगल[9] व रंगानाथन आदि[6] के प्रमेयों को 2-दूरीक समष्टि पर विस्तारित एवं व्यापकीकृत करता है।

Abstract

Fixed points of mappings with contractive iterate on 2-metric spaces. *By* Vijayendra Kumar, Sucharita Rangnathan and Shyam Lal Singh, Mathematics Department, Gurukul Kangari Vıswavidyalaya, Hardwar.

Let (x, d) be a complete 2-metric space with d continuous, and $f: X \to X$ a mapping satisfying the condition : there exist non-negative numbers α, β, γ with $\alpha+2\beta+\gamma<1$ such that for each $x \in X$ there is a positive integer $n(x)$ such that for all $y, a \in X$,

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y, a)$$

$$\leqslant \alpha d(x, f^{n(x)}x, a)+\beta d(x, f^{n(x)}y, a)+\gamma d(x, y, a).$$

Then f has a unique fixed point u and $\{f^n x_0\}$ converges to u for each $x_0 \in X$.

1. प्रस्तावना :

मान लें कि (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है और $f: M+M$। बानाख संकुचन सिद्धान्त के विभिन्न व्यापकीकरणों में सहगल[9] द्वारा प्रदत्त निम्न परिणाम (प्रमेय 1) स्थिर विन्दु सिद्धान्त में प्रमुख स्थान रखता है।

प्रमेय 1 :

मान लें कि पूर्ण दूरीक समष्टि M पर f एक संतत प्रतिचित्रण इस प्रकार है कि धनात्मक संख्या $k<1$ हेतु M के प्रत्येक बिन्दु x के लिए एक धनात्मक पूर्ण संख्या $n(x)$ का ऐसा अस्तित्व होता है कि समष्टि M के प्रत्येक बिन्दु y के लिये

$$d(f^{n(x)}x, f^{n(x)}y) \leqslant kd(x, y) \quad (1.1)$$

संतुष्ट होता है । तब प्रतिचित्रण f एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु रखता है ।

उक्त प्रमेय में f^n का तात्पर्य प्रतिचित्रण f के nवें पुनरावृत्तिक से है । कालान्तर में प्रमेय 1 का कुछ गणितज्ञों द्वारा व्यापकीकरण एवं विस्तारण हुआ । दूरीक समष्टि में व्यापकीकरण करने वाले प्रमुख गणितज्ञ हैं किरिक[1], गुसमान[2], आईसेकी[3], खजाञ्ची[4], मटकोवस्की[5] तथा रे एवं रोअड्स[7] । चुमकी पंजा एवं बैष्णव ने प्रमेय 1 का विस्तारण समपरिवेश समष्टि में किया है । सुचरिता रंगनाथन[6] ने उक्त प्रमेय का विस्तारण 2-दूरीक समष्टि में किया । इस प्रपत्र के आगामी अनुभाग में रीच[8] द्वारा अध्ययन किये गये प्रतिचित्रण की भावना का समादर करते हुये रंगनाथन के उक्त प्रमेय का व्यापकीकरण किया जायेगा ।

2. स्थिर बिंदु प्रमेय :

प्रमेय 2 :

मान लें कि (x, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है । यदि X पर एक प्रतिचित्रण f इस प्रकार हो कि ऋणेतर संख्याओं α, β, ν (जहाँ $\alpha+2\beta+\nu<1$) के लिये समष्टि X के प्रत्येक अवयव x हेतु एक धनात्मक पूर्णांक $n(x)$ का ऐसा अस्तित्व प्राप्त होता है कि X के सभी y, a के लिये

प्रतिबन्ध

$$d(f^{n(x)}x,\ f^{n(x)}y, a) \quad (2.1)$$

$$\leqslant \alpha d(x, f^{n(x)}x, a)+\beta d(x, f^{n(x)}y, a)+\nu d(x, y, a).$$

संतुष्ट होता हो, तब प्रतिचित्रण f का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु (मान लें u) होता है तथा X के प्रत्येक x_0 के लिये $\{f^n x_0\}$ बिन्दु u पर अभिसरित होता है ।

इस प्रमेय की उपपत्ति हेतु निम्नलिखित प्रमेयिका का प्रयोग होगा ।

प्रमेयिका :

यदि X पर प्रतिचित्रण f समष्टि X के प्रत्येक बिन्दु x के लिये प्रमेय 1 के प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता हो तो X के प्रत्येक a के लिये $\nu(x)=$ उच्चक $d(f^n x, x, a)$ परिमित है ।

प्रमेयिका की उपपत्ति :

मान लें X के x तथा समस्त a के लिये

$$\nu(x)=\text{अधिकतम } \{d(f^k x, x, a) : k=0, 1, 2, \ldots n(x)\}.$$

किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिये, मान लें $r\geqslant 0$ और $0\leqslant s<n(x)-1$ इस प्रकार है कि

$$n=\nu n(x)+s.$$

तब

$$d(x, f^{rn(x)+s}x, a) \tag{2.2}$$

$$\leqslant d(x, f^{n(x)}x, a)+d(f^{rn(x)+s}x, f^{n(x)}x, a)$$

$$+d(f^{n(x)}x, f^{rn(x)+s}x, x).$$

(2.1) से, (2.2) के दायें पक्ष में अंतिम पद का मान शून्य है। पुनः (2.1) से

$$d(f^{rn(x)+s}x, f^{n(x)}x, a)$$

$$\leqslant \alpha d(x, f^{n(x)}x, a)+\beta d(x, f^{rn(x)+s}x, a)$$

$$+\nu d(x, f^{(r-1)n(x)+s}x, a)$$

$$\leqslant \alpha e(x)+\beta[d(x, f^{n(x)}a, a)+d(x, f^{rn(x)+s}x, f^{n(x)}x)$$

$$+d(f^{rn(x)+s}x, f^{n(x)}x, a)]+\nu d(x, f^{(r-1)n(x)+s}x, a)$$

अर्थात्

$$d(f^{rn(x)+s}x, f^{n(x)}x, a)$$

$$\leqslant pe(x)+qd(x_1 f^{(r-1)n(x)+s}x, a)$$

जहाँ

$$p=\{(\alpha+\beta)/(1-\beta)\}<1, \quad q=\{\nu/(1-\beta)\}<1.$$

इसलिये (2.2) से,

$$d(x, f^{rn(x)+s}x, a)$$

$$\leqslant(1+p)e(x)+qd\,(x, f^{(r-1)n(x)+s}x, a).$$

इस असमिका का $(r-1)$ बार उपयोग करने पर

$$d(x, f^{rn(x)+s}x, a)$$

$$\leqslant(1+p)e(x)[1+q+q^2+\ldots+q^{r-1}]+q^r d(x,f^s x,a)$$

$$\leqslant(1+p)e(x)[1+q+q^2+\ldots+q^{r-1}]+q^r e(x)$$

$$\leqslant(1+p)e(x)[1+q+q^2+\ldots+q^{r-1}+q^r]$$

$$\leqslant(1+p)e(x)/)(1-q).$$

प्राप्त होता है।

चूंकि $n=rn(x)$ यादृच्छिक है अतः $r(x)$ परिमित है।

प्रमेय की उपपत्ति :

मान लें में x मनमाना है। मान लें

$$m_0=n(x_0),x_1=f^{m_0}x_0$$

और उत्तरोत्तर क्रम में

$$m_i=n(x_i),\ x_{i+1}=f^{m_i}x_i.$$

सर्वप्रथम हम यह दर्शाते हैं कि $t\geqslant i$ के लिये

$$d[x_i,\ x_{i+1},\ x_t]=0 \tag{2.3}$$

अतः t का मान i अथवा $i+1$ है। मान लें $t>i+1$. तब

$$x_t=f^{m_{t-1}}\ x_{t-1}=f^{m_{t-1}}\ f^{m_{t-2}}\ x_{t-2}=\ldots$$

$$=f^{\lambda}\ f^{m_i}x_i,\quad \lambda=m_{i+1}+m_{i+2}+\ldots+m_{t-1}$$

$$=f^{m_i}(f^{\lambda}\ x_i).$$

इसलिए (2.1) से

$$d(x_{i+1},\ x_t,\ x_i)=d(f^{m_i}x_i,f^{\lambda}x_i,x_i)=0.$$

तथा (2.1) से ही

$$d(x_2,\ x_1,\ a)=d(f^{m_0}f^{m_1}x_0,\ f^{m_0}x_0,\ a)$$

$$\leqslant \alpha d(x_0,\ x_1,\ a)+\beta d(x_0.\ x_2,\ a)+v d(x_0,f^{m_1}x_0,\ a)$$

$$\leqslant \alpha d(x_0,\ x_1,\ a)+\beta[d(x_0,\ x_1,\ a)+d(x_2,\ x_1,\ a)$$

$$+d(x_0,\ x_2,\ x_1)]+v d(f^{m_1}x_0,\ x_0,\ a)$$

क्योंकि (2.3) से

$$d(x_0, x_2, x_1)=0$$

इसलिए

$$d(x_2, x_1, a) \tag{2.4}$$

$$\leqslant pd(x_1, x_0, a)+qd(f^{m_1}x_0, x_0, a)$$

जहाँ p तथा q के मान वही हैं जो प्रमेयिका की उपपत्ति में माने गये हैं।

इसी प्रकार

$$d(x_3, x_2, a) \tag{2.5}$$

$$\leqslant pd(x_2, x_1, a)+qd(f^{m_2}x_1, x_1, a).$$

और (2.1) ही से,

$$d(f^{m_2}x_1, x_1, a)=d(f^{m}{}_0\, f^{m_2}\, x_0, f^{m}{}_0 x_0, a)$$

$$\leqslant \alpha d(x_0, x_1, a)+\beta d(x_0, f^{m_2}x_1, a)+v d(x_0, f^{m_2}x_0, a)$$

$$\leqslant \alpha d(x_0, x_1, a)+\beta[d(x_0, x_1, a)+d(f^{m_2}x_1, x, a)$$

$$+d(x_0, f^{m_2}x_1, x_1)]+v d(f^{m_2}x_0, x_0, a),$$

क्योंकि (2.1) से

$$d(x_0, f^{m_2}x_1, x_1)=d(f^{m_0}x_0, f^{m_0}f^{m_2}x_0, x_0)=0$$

इसलिये

$$d(f^{m_2}x_1, x_1, a \tag{2.6}$$

$$\leqslant pd(x_1, x_0, a)+qd(f^{m_2}x_0, x_0, a)$$

प्राप्त होता है।

अतः (2.4) तथा (2.6) से (2.5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$d(x_3, x_2, a)$$

$$\leqslant p(p+q)d(x_1,x_0,a)+pqd(f^{m_1}x_0,x_0,a)+q^2d(f^{m_2}x_0,x_0,a).$$

व्यापक रूप में,

$$d(x_{n+1}, x_n, a)$$

$$\leqslant p(p+q)^{n-1}\, d(x_1,x_0,a)+pq(p+q)^{n-2}\, d(f^{m_1}x_0,x_0,a)+pq^2(p+q)^{n-3}$$

$$\times d(f^{m_2}x_0,x_0,a)\ldots +pq^{n-1}\, d(f^{m_{n-1}}x_0,x_0,a)q^n d(f^{m_n}x_0,x_0,a)$$

$$\leqslant[p(p+q)^{n-1}+pq(p+q)^{n-2}+pq^2(p+q)^{n-3}+\ldots+pq^{n-1}+q^n]r(x_0)$$

$$=(p+q)^n\, r(x_0)$$

अर्थात्

$$d(x_{n+1}, x_n, a)=k^n r(x_0) \tag{2.7}$$

जहाँ

$$k=p+p<1.$$

$m<n$ के लिये (2.7) का बारम्बार उपयोग करने पर,

$$d(x_m, x_n, a)$$

$$\leqslant d(x_m, x_{m+1}, a)+d(x_{m+1}, x_n, a)+d(x_m, x_n, x_{m+1})$$

$$\leqslant k^m r(x_0)+d(x_{m+1}, x_n, a)$$

[∵(2·3) से $d(x_m, x_n, x_{m+1})=0$]

अत:

$$d(x_m, x_n, a)$$

$$\leqslant k^m r(x_0)+k^{m+1}r(x_0)+d(x_{m+2}, x_n, a)$$

$$\leqslant(k^m+k^{m+1}+\ldots+k^{n-1})r(x_0)$$

$$<\{k^m/(1-k)\}\, r(x_0).$$

क्योंकि $r(x_0)$ परिमित है, अत: जैसे ही m, n को अनन्त लेते हैं

$$d(x_m, x_n, a)\to 0$$

इसलिये $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है अत: अभिसारी है। मान लें $\{x_n\}$ बिन्दु u पर अभिसारित होता है। (2.1) से

$$d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, a$$

$$\leqslant \alpha d(u, f^{n(u)}u, a)+\beta d(u, f^{n(u)}x_n, a)+\nu d(u, x_n, a)$$

$$\leqslant \alpha d(u, f^{n(u)}u, a)+\beta[d(u, x_n, a)+d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)$$

$$+d(u, f^{n(u)}x_n, x_n)]+\nu d(u,x_n, a)$$

और

$$d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, x_n)$$

$$\leqslant \alpha d(u, f^{n(u)}u, x_n)+\beta d(u, f^{n(u)}x_n, x_n)+0,$$

निम्न असमिका

$$d(u, f^{n(u)}u, a)$$

$$\leqslant d(u, x_n, a)+d(u, f^{n(u)}u, x_n)+d(x_n, f^{n(u)}u, a)$$

$$\leqslant d(u, x_n, a)+d(u, f^{n(u)}u, x_n)+d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)$$

$$+d(f^{n(u)}x_n, f^{n(u)}u, a)+d(x_n, f^{n(u)}u, f^{n(u)}x_n)$$

से

$$(1-\alpha)d(u, f^{n(u)}u, a) \tag{2.8}$$

$$\leqslant(1+\beta+\nu)d(u, x_n, a)+(1+\alpha)d(u, f^{n(u)}u, x_n)$$

$$+(1+\beta)d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)+2\beta d(x_n, f^{n(u)}x_n, u)$$

प्राप्त होता है।

(2.1) से

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)=d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}}f^{n(u)}x_{n-1}, a)$$

$$\leqslant \alpha d(x_{n-1}, x_n, a)+\beta d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_n, a)+\nu d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a)$$

$$\leqslant \alpha d(x_{n-1}, x_n, a)+\beta[d(x_{n-1}, x_n, a)+d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)$$

$$+d(x_{n-1}, x_n, f^{n(u)}x_n)]+\nu d(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a).$$

क्योंकि (2.1) से

$$d(x_{n-1}, x_n, f^{n(u)}x_n)=d(f^{m_{n-1}}x_{n-1}, f^{m_{n-1}}f^{n(u)}x_{n-1}, x_{n-1})=0,$$

इसलिये

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)\leqslant pd(x_{n-1}, x_n, a)+qd(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a)$$

जहाँ p और q के मान वही हैं जो प्रमेयिका की उपपत्ति में माने गये हैं। (2.7) के आलोक में, हमें

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)\leqslant pk^{n-1}r(x_0)+qd(x_{n-1}, f^{n(u)}x_{n-1}, a),$$

(जहाँ $k=p+q<1$).

प्राप्त होता है।

इस असमिका का $(n-1)$ बार उपयोग करने से,

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)$$

$$\leqslant [pk^{n-1}+pqk^{n-2}+pq^2k^{n-3}+\ldots+pq^{n-2}k+pq^{n-1}+q^n]r(x_0)$$

$$\leqslant r(x_0)[p(p+q)^{n-1}+pq(p+q)^{n-2}+pq^2(p+q)^{n-3}+pq^{n-2}(p+q)+pq^{n-1}+q^n]$$

$$=r(x_0)(p+q)^n$$

प्राप्त होता है।

अर्थात्

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, a)\leqslant k^n r(x_0). \tag{2.9}$$

इसी प्रकार

$$d(x_n, f^{n(u)}x_n, u)\leqslant k^n r(x_0). \tag{2.10}$$

(2.9) तथा (2.10) से (2.8) में प्रतिस्थापित करने पर

$$(1-\alpha)d(u, f^{n(u)}u, a)$$

$$\leqslant (1+\beta+\nu)d(u,x_n,a)+(1+\alpha)d(u, f^{n(u)}u, x_n)+(1+3\beta)k^n(x_0)$$

प्राप्त होता है।

इसमें n को अनन्त लेने पर,

$$(1-\alpha)d(u, f^{n(u)}u, a)\leqslant 0$$

प्राप्त होता है।

अतः

$$u=f^{n(u)}u.$$

इसलिये u प्रतिचित्रण $f^{n(u)}$ का स्थिर बिन्दु है।

मान लें v(u से भिन्न है) भी $f^{n(u)}$ का स्थिर बिन्दु है। तब (1) से, X के प्रत्येक a के लिये

$$d(u, v, a)d(f^{n(u)}u, f^{n(u)}v, a)\leqslant(\beta+\nu)d(u,v,a).$$

अतः

$$u=v.$$

इस प्रकार u अद्वितीय है।

क्योंकि

$$u=f^{n(u)}u$$

इस कारण से

$$fu=f^{n(u)}fu$$

यह दर्शाता है कि fu भी $f^{n(u)}$ का स्थिर बिन्दु है। अतः $u=fu$ अद्वितीय है। अभी यह सिद्ध करना शेष है कि

$$\text{सीमा}_{n\to} f^n x_0=u.$$

मान लें, X के समस्त a के लिये,

$M=$ अधिकतम

$$\{d(f^m x_0,u,a) : m=0, 1, 2, \ldots n(u)-1\}$$

यदि n पर्याप्त वृहत् पूर्णांक है, तब

$$n=rn(u)+s, \quad 0\leqslant s<n(u), r>0,$$

और (2.1) से

$$d(f^n x_0,u,a)=d(f^{rn(u)+s}x_0, f^{n(u)}u, a)$$

$$\leqslant \beta d(u, f^n x_0, a)+\nu d(u, f^{(r-1)n(u)+s}x_0, a)$$

अथवा

$$d(f^n x_0, u, a)=d(f^{rn(u)+s}x_0, u, a)$$

$$\leqslant qd(f^{(r-1)n(u)+s}x_0, u, a)\leqslant q^2 d(f^{(r-2)n(u)+s}x_0, u, a)$$

$$\leqslant q^r d(f^s x_0, u, a)$$

$$\leqslant q^r M\to 0.$$

(n को अनन्त लेने पर)

अतः $\{f^n x_0\}$ समष्टि X के प्रत्येक x_0 के लिये u पर अभिसरित होता है।

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी :

रंगनाथन[6] की प्रमेय इस प्रमेय की $\alpha=\beta=0$ तथा ν एक नियतांक के लिये विशेष स्थिति है।

निर्देश

1. किरिक, एल० बी०, Publ. Inst. Mat. (Beograd) 1974, **17**, 52-58.
2. गुसमान, एल० एफ० जू०, Proc. Amer. Math. Soc. 1970, **26**, 615-618.
3. आइसेकी, कियोसी, Nanta Math. 1976, **9**, 54-58.
4. खजाञ्ची, ललिता, Math. Japon. 1974,**19**, 283-289.
5. मटकोवस्की, जे०, Proc. Amer. Math. Soc, 1977 **26**, 344-348.
6. रंगानाथन, सुचरिता, Ph. D. Thesis, B.H.U., Varanasi, 1978.
7. रे, बी० के० तथा रोअड्स, बी० ई०, Pac. J. Math.1977, **71**, 517-520.
8. रीच, एस०, Bull. Un. Mat. Ital., 1971, **4**, 1-11.
9. सहगल, वी० एम०, Proc. Amer. Math. Soc. 1969, **23**, 631-634.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34. No. 4, 1991

बहुचर H-फलन के प्राचलों के प्रति समाकलन

अशोक रोंघे

गणित विभाग, एस० एस०एल० जैन कनिष्ठ महाविद्यालय, विदिशा (म०प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 19, 1990]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में बहुचर H-फलन सम्बन्धी कतिपय समाकलनों का मान ज्ञात किया गया है जहाँ समाकलन बहुचर H-फलन के प्राचलों के प्रति सम्पन्न किया गया है। विशिष्ट दशाओं के रूप में कुछ ज्ञात सम्बन्ध भी प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Integration of multivariable H-function with respect to parameters. *By* Ashok Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain Kanishtha Mahavidyalay, Vidisha (M.P.).

In this paper few integrals involving multivariable H-function have been evaluated, where the integration has been performed with respect to parameters of multivariable H-functions. Few known relations have been obtained as particular cases.

1. विषय प्रवेश :

श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल[7] ने पहले ही कई सम्मिश्र चरों वाले H-फलन अथवा बहुचर H-फलन का प्रवर्तन तथा अध्ययन किया है, किन्तु गोयल[3] तथा गर्ग[4] के दो चरों वाले H-फलन के संकेतन के समान हम निम्नांकित संकेतन का उपयोग करेंगे, जो अधिक संक्षिप्त तथा स्वतः व्याख्यात्मक है :

$$H[z_1, \ldots, z_r] = \mathsf{H}^{o,\, n\, :\, \{m_i,\, n_i\}}_{p,\, q\, :\, \{p_i,\, q_i\}} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_j : \alpha_j', \ldots ; \alpha_j^{(r)}\right)_{1p} : \left(C_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)}\right)_{1pi} \\ \left(b_j : \beta_j', \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1q} : \left(d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)}\right)_{1qi} \end{matrix} \right]$$

$$= \mathsf{H}^{o,\, n\, :\, \{m_1, n_1; \ldots; m_r, n_r\}}_{p,\, q\, :\, \{p_1, q_1; \ldots; p_r, q_r\}} \left[z_1, \ldots, z_r \middle| \begin{matrix} N : R \\ M : T \end{matrix} \right]$$

$$= 1/(2\pi\omega)^r \int_{L1} \cdots \int_{Lr} \phi(s_1, \ldots, s_r) \prod_{j=1}^{n} \{\theta_i(s_i)(z_i)^{si}\, ds_i\}, \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\omega = \sqrt{(-1)},\ i = (1, \ldots, r),\ N = \left(a_j : \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p} \tag{1.2}$$

$$R = \left(c_j^{(i)}, F_j^{(i)}\right)_{1,pi} \tag{1.3}$$

$$M = \left(b_j', \beta_j', \ldots, \beta_j^{(\pi)}\right)_{1,q}, \tag{1.4}$$

$$T = \left(d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)}\right)_{1,qi} \tag{1.5}$$

$$\phi(s_1, \ldots, s_r) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 - a_j\right) + \sum_{i=1}^{r} \left(a_j^{(i)}\, s_i\right)$$

$$\left[\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(1 - b_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_j^{(r)} s_i\right) \prod_{j=1}^{p} \left(a_j - \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)}\, s_i\right) \right]^{-1} \tag{1.6}$$

$$\theta_i(si) = \prod_{j=1}^{m_i} \Gamma\left(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}\right) \prod_{j=1}^{n_i} \Gamma\left(1 - C_j^{(i)} + E_j^{(i)} s_i\right)$$

$$\left[\prod_{j=m_i+1}^{q_i} \Gamma\left(1 - d_j^{(i)} + \delta_j^{(i)} s_i\right) \prod_{j=ni+1}^{p_i} \Gamma\left(C_j^{(i)} - E_j^{(i)} s_i\right) \right]^{-1}, \tag{1.7}$$

उपलिपि (i) में i डैशों की संख्या है, उदाहरणार्थ $b^{(1)} = b'$, $b^{(2)} = b''$ इत्यादि प्रतीक

$\left(a_j : \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p}$ प्राचलों $\left(a_1 : \alpha_1', \ldots, d_1^{(r)}\right), \ldots, \left(a_p : \alpha_p', \ldots, d_p^{(r)}\right)$

तथा $(C_j, E_j)_{1,p}$ प्राचलों $(C_1, E_1), \ldots, (C_p, E_p)$ के संक्षिप्त रूप हैं। विस्तृत व्याख्या प्राचलों पर लगे प्रतिबन्धों बहुचर H-फलनों के उपगामी प्रसार के लिये सक्सेना श्रीवास्तव तथा पंडा[5,7] के शोधपत्र को देखें।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित फल [2p. 301(21, 23)] का प्रयोग करेंगे :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)dx}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)\Gamma(d-x)} = \frac{\sin[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2\Gamma(a+b)/2\Gamma(c+d)/2\Gamma(c+d-1)}, \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)dx}{\Gamma(a+x\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)\Gamma(d-x)} = \frac{\cos[\frac{1}{2}\pi(b-a)]}{2\Gamma(a+b)/2\Gamma(c+d)/2\Gamma(a+d-1)}, \quad (1.9)$$

जहाँ

(1.8) एवं (1.9) में

$$Re(a+b+c+d)>2, \quad a+c=b+d,$$

2. जिन समाकलनों को बहुचर H-फलन के प्राचलों के सापेक्ष ज्ञात करना है, वे निम्नवत् हैं तथा प्रत्येक समाकलन में N, R, M एवं T का आशय (1.2) से (1.5) में प्राचलों के समुच्चयों को दर्शाता है :

प्रथम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi x) H^{o,\,h;\,\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p,\,q+4;\,\langle p_i,q_i\rangle} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \\ M,\phi_1 : T \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{\sin[\frac{1}{2}(b-a)]}{2} H^{o,\,n\,:\,\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p,\,q+3\,:\,\langle p_i,q_i\rangle} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \\ M,\phi_2 : T \end{matrix}\right], \quad (2.1)$$

द्वितीय समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) H^{o,\,n\,:\,\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p,\,q+4\,:\,\langle p_i,q_i\rangle} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} N : R \\ \\ M,\phi_1 : T \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{\cos[\frac{1}{2}(b-a)]}{2} H^{o,\,n\,:\,\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p,\,q+3\,:\,\langle p_i,p_i\rangle} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} NR : \\ \\ M,\phi_2 : T \end{matrix}\right], \quad (2.2)$$

समाकलन (2.1) एवं (2.2) में ϕ_1 और ϕ_2 प्राचलों का समुच्चय जो निम्न है :

$$\phi_1 = \left[1-a-x : \sum_{u=1}^{k} A_j^{(u)}\right], \left[1-b+x : \sum_{u=1}^{k} B_j^{(u)}\right], \left[1-c-x : \sum_{u=1}^{k} A_j^{(u)}\right],$$

$$\left[1-d+x : \sum_{u=1}^{k} B_j^{(u)}\right], \quad (2.3)$$

$$\phi_2=\left[1-\left(\frac{a+b}{2}\right):\sum_{u=1}^{k}A_j^{(r)}\right],\ \left[1-\left(\frac{c+d}{2}\right):\sum_{u=1}^{k}B_j^{(u)}\right],$$

$$\left[2-a-d:\sum_{u=1}^{k}\left(A_j^{(u)}+B_j^{(u)}\right)\right], \tag{2.4}$$

समाकलन (2.1) और (2.2) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी हैं।

$$\sum_{u=0}^{r}A_j^{(u)}\geqslant 0,\ \sum_{u=0}^{r}B_j^{(u)}\geqslant 0,\ |\arg(z_i)|<\tfrac{1}{2}\Omega_i\pi,\ \forall i\epsilon(1,\ldots r)$$

$$Re\left[a+b+c+d+2\sum_{u=1}^{k}\left(A_j^{(u)}+B_j^{(u)}\right)Re\left(B_j^{(u)}/\beta_j^{(u)}\right)\right]>2, \tag{2.5}$$

तृतीय समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi x)\ \mathsf{H}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}_{p+4,p:\langle p_i,p_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\\vdots\\z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\M:\phi_3,T\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}(b-a)]}{2}\ \mathsf{H}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}_{p+3,q:\langle p_i,q_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\\vdots\\z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\M:\phi_4,T\end{matrix}\right], \tag{2.6}$$

चतुर्थ समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\pi x)\ \mathsf{H}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}_{p+4,q:\langle p_i,q_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\\vdots\\z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\M:\phi_3,T\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\cos[\frac{1}{2}(b-a)]}{2}\ \mathsf{H}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}_{p+3,q:\langle p_i,q_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\\vdots\\z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\M:\phi_4,T\end{matrix}\right] \tag{2.7}$$

समाकलन (2.6) और (2.7) में ϕ_3 एवं ϕ_4 प्राचलों का समुच्चय जो निम्नवत् है :

$$\phi_3=\left(a+x:\sum_{j=1}^{k}A_j^{(u)}\right),\ \left(c+x:\sum_{j=1}^{k}B_j^{(u)}\right),\ \left(b-x:\sum_{j=1}^{k}A_j^{(u)}\right),$$

$$\left(d-x:\sum_{j=1}^{k}B_j^{(u)}\right), \tag{2.8}$$

$$\phi_4=\left[1-\frac{(a+b)}{2}:\sum_{j=1}^{k}A_j^{(u)}\right],\left[1-\frac{(c+d)}{2}:\sum_{j=1}^{k}B_j^{(u)}\right],$$

$$\left[2-(a+d):\sum_{j=1}^{k}\left(A_j^{(u)}+B_j^{(u)}\right)\right], \tag{2.9}$$

समाकलन (2.6) एवं (2.7) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी है।

$$\sum_{u=0}^{k}A_j^{(u)}\geqslant 0,\ \sum_{n=0}^{k}B_j^{(u)}\geqslant 0,\quad |\arg(z_i)|<\tfrac{1}{2}\Omega_i\pi,\forall i\in(1,\ldots,r), \tag{2.10}$$

$$Re\left[a+b+c+d-2\sum_{u=1}^{k}\left(A_j^{(k)}+B_j^{(k)}\right).\ Re\left(B_j^{(k)}/\beta_j^{(k)}\right)\right]>2, \tag{2.11}$$

पंचम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi x)\,H_{p+2,q+2:\langle p_i,q_i\rangle}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_5,m:\phi_6,T\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}(b-a)]}{2}H_{p+1,q+2:\langle p_i,q_i\rangle}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_7,m:\phi_8,T\end{matrix}\right], \tag{2.12}$$

षष्ठम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\pi x)\,H_{p+2,q+2:\langle p_i q_i\rangle}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_5,m:\phi_6,T\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\cos[\frac{1}{2}(b-a)]}{2}H_{p+1,q+2:\langle p_i,q_i\rangle}^{o,n:\langle m_i,n_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_7,m:\phi_8,T\end{matrix}\right], \tag{2.13}$$

समाकलन (2.12) और (2.13) में क्रमशः ϕ_5, ϕ_6, ϕ_7 एवं ϕ_8 प्राचलों का समुच्चय दर्शाता है, जो निम्नवत् है :

$$\phi_5=\left(1-a-x:\sum_{u=1}^{k}A_j^{(u)}\right),\left(1-b+x:\sum_{u=1}^{k}A_j^{(u)}\right), \tag{2.14}$$

$$\phi_6=\left(c+x:\sum_{u=1}^{k}B_j^{(u)}\right),\left(d-x:\sum_{u=1}^{k}B_j^{(u)}\right), \tag{2.15}$$

$$\phi_7=\left[2-\left(\frac{a+b}{2}\right):2\sum_{u=1}^{k}A_j\right],\ \left[2-a-d:\sum_{u=1}^{k}A_j^{(u)}-B_j^{(u)}\right], \tag{2.16}$$

$$\phi_8=\left[2-c-d:2\sum_{u=1}^{k}B_j^{(u)}\right], \tag{2.17}$$

समाकलन (2.12) एवं (2.13) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी हैं।

$$\sum_{u=0}^{k}A_j^{(u)}>\sum_{u=0}^{k}B_j\geqslant 0,\quad |\arg(z_i)|<\tfrac{1}{2}\Omega_i\pi,\ \forall i\epsilon(1,\ldots,r), \tag{2.18}$$

$$Re\left[a+b+c+d+2\sum_{u=1}^{k}\left(A_j^{(u)}\langle Re\left(A_j^{(k)}\Big/\alpha_j^{(k)}\right\rangle-2\sum_{u=1}^{k}B_j^{(u)}\langle Re\left(B_j^{(k)}\Big/\beta_j^{(k)}\right\rangle\right.\right.>2, \tag{2.19}$$

सप्तम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\pi x)\,\mathsf{H}^{o,\,n:\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p+2,q+2:\langle p_i,q_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_9,m:\phi_{10}T\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\sin[\frac{1}{2}(b-a)]}{2}\mathsf{H}^{o,n:\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p+2,q+1:\langle p_i,q_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_{11},m:\phi_{12},T\end{matrix}\right], \tag{2.20}$$

अष्ठम समाकलन :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\pi x)\,\mathsf{H}^{o,\,n:\langle m_i,\,n_i\rangle}_{x+2,q+2:\langle p_i,q_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_9,m:\phi_{10}T\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{\cos[\frac{1}{2}(b-a)]}{2}\mathsf{H}^{o,\,n:\langle m_i,\,n_i\rangle}_{p+2,q+1:\langle p_iq_i\rangle}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_r\end{matrix}\middle|\begin{matrix}N:R\\ \\ \phi_{11},\ m:\phi_{12},T\end{matrix}\right], \tag{2.21}$$

समाकलन (2.20) और (2.21) में ϕ_9, ϕ_{10}, ϕ_{11} एवं ϕ_{12} प्राचलों का समुच्चय दर्शाता है, जो निम्नवत् है :

$$\phi_9=\left(a-x:\sum_{u=1}^{k}A_j^{(u)}\right),\left(b+x:\sum_{u=1}^{k}A_j^{(u)}\right), \tag{2.22}$$

$$\phi_{10}=\left(1-c-x:\sum_{u=1}^{k}B_j^{(u)}\right),\left(1-d+x:\sum_{u=1}^{k}B_j^{(k)}\right), \tag{2.23}$$

$$\phi_{11}=\left(2-c-d : 2\sum_{u=1}^{k} B_j^{(u)}\right), \tag{2.24}$$

$$\phi_{12}=\left[2-(a+b) : 2\sum_{u=1}^{k} A_j^{(u)}\right], \left[2-\left(a+d : \sum_{u=1}^{r} B_j^{(u)}-A_j^{(u)}\right)\right], \tag{2.25}$$

समाकलन (2.20) एवं (2.21) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध एवं अभिसारी हैं :

$$\sum_{u=0}^{k} B_j^{(u)} > \sum_{u=0}^{k} A_j^{(u)} \geqslant 0, \quad |\arg (z_i)|<\tfrac{1}{2}\Omega_i\pi, \quad \forall i\in(1, \ldots, r), \tag{2.26}$$

$$Re\left[a+b+c+d+2\sum_{u=1}^{k}\left(B_j^{(u)}\right) \langle Re\left(B_j^{(u)} / \beta_j^{(u)}\right)\right.$$

$$\left. -2\sum_{u=1}^{k}\left(A_j^{(u)}\right) \langle Re\left(A_j^{(k)} / \alpha_j^{(k)}\right)\rangle\right]>2. \tag{2.27}$$

उपपत्ति

(2.1) की स्थापना के लिये इसके वाम पक्ष के समाकलन में आये बहुचर H-फलन को (1.1) के बल पर मेलिन-बार्निज प्रकार के बहु-कंटूर समाकलनों के रूप में व्यक्त करते हैं, जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध और पूर्णतया अभिसारी है, जिससे हमें निम्न समाकलन की प्राप्ति होती है :

$$=1/(2\pi\omega)^r \int_{L1}\int_{L2}\cdots\int_{r} \phi(s_1, \ldots, s_r) \prod_{j=1}^{r} \langle\theta_i(s_i)(z_i)^{si}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)dx\, d\, si}{\Gamma\left(a+\sum\limits_{u=1}^{r} A_j^{(u)} s_i+x\right)\Gamma\left(b+\sum\limits_{u=1}^{r} A_j^{(u)} s_1-x\right)\Gamma\left(c+\sum\limits_{u=1}^{r} B_j^{(u)} s_1+x\right)\Gamma\left(d+\sum\limits_{u=1}^{r} B_j^{(u)} s_1-x\right)}$$

अब (1.8) की सहायता से आंतरिक्र अनन्त समाकलन का मान प्राप्त परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (2.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है। इसी प्रकार परिणाम (2.6), (2.12) एवं (2.20) प्राप्त किये जा सकते हैं।

टिप्पणी

परिणाम (2.2), (2.7), (2.13) एवं (2.21) प्राप्त करने के लिये (1.8) के स्थान पर (1.9) का प्रयोग करके (2.1) के लिये की गई उपपत्ति की तरह प्राप्त कर (पुनः दोहरा कर) सकते हैं।

3. विशिष्ट दशाएँ :

इस अनुभाग में कतिपय प्राप्त किये गये परिणामों को ज्ञात किया गया है।

(अ) यदि समाकलन प्रथम, तृतीय, पंचम एवं सप्तम में $r=1$ रखें तो हमें आनन्दानी, रोंघे के परिणाम प्राप्त होंगे। (1 देखें p. 13-16)

(ब) यदि समाकलन द्वितीय, चतुर्थ, षष्ठम एवं अष्ठम में $r=2$ रखें तो लेखक के पुराने परिणामों की प्राप्ति होती है। (6 देखें p. 45-51)

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देशन के लिये लेखक डॉ० आर० डी० अग्रवाल, गणित विभाग, इंजीनियरिंग कॉलेज, विदिशा का आभारी है।

निर्देश

1. आनन्दानी, पी० तथा रोंघे ए०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** 1987, 30, 13-16.

2. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि : Table of Integral Transforms, भाग 2, मेकग्राहिल न्यूयार्क 1954.

3. गोयल, एस० पी० : Pure and applied Mathematicka Sci. 1978, **8**, 19-28.

4. गर्ग, आर० एस० : Pure and applied Mathematicka Sci. 1979, **10**, 31-36.

5. सक्सेना, आर० के०, : Kygug. Math. J. 1977, **17**, 221-226.

6. रोंघे, ए० , **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** 1989, **32**, 45-51.

7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H-function of One and Two Variables, with Applications. साउथ-एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली तथा मद्रास, 1982

Vinana Parishad Anusandhan Patrika. Vol. 34. No 4 1991

2-दूरीक समष्टि पर एक सामान्य स्थिर विन्दु प्रमेय

एन० एस० सिमोनिया
74 महाजनी वार्ड, नरसिंहपुर (म०प्र०)

[प्राप्त—मार्च 15, 1990]

सारांश

2-दूरीक समष्टि पर उपगामित: क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों के लिये एक स्थिर विन्दु प्रमेय सिद्ध किया गया है ।

Abstract

Common fixed point theorem on 2-metric space. *By* N. S. Simoniya, 74, Mahajani ward, Narsinghpur (M.P.).

A fixed point theorem for asymptotically commuting mappings on a 2-metric space have been proved.

प्रस्तुत प्रपत्र में 2-दूरीक समष्टि (x, d) पर A, S, T प्रतिचित्रणों के लिये एक प्रमेय सिद्ध किया गया है जिसमें $\{A, S\}$ तथा $\{A, T\}$ एक सर्वसम स्थिर विन्दु के लिये उपगामित: क्रमविनिमयी (asymptotically commuting) हैं ।

परिभाषा[2] : 2-दूरीक समष्टि में आत्मप्रतिचित्रण A तथा T उपगामित: क्रमविनिमयी या z-उपगामित: क्रमविनिमयी कहलाते हैं यदि और केवल यदि

$$\lim d(ATx_n, TAx_n)=0,$$

जहाँ $\{x_n\}$ x में ऐसा अनुक्रम है कि x के एक विन्दु z के लिये

$$\lim Ax_n = \lim Tx_n = z.$$

परिभाषा[3] : माना कि A तथा T एक 2-समष्टि दूरीक (x, d) पर आत्म-प्रतिचित्रण हैं। A तथा T को उपगामितः अभिगमन या z-उपगामितः क्रमविनिमयी कहा जाता है यदि और केवल यदि x के प्रत्येक a के लिये

$$\lim d(ATx_n, TAx_n, a)=0,$$

जहाँ $\{x_n\}$ x में ऐसा अनुक्रम है कि

$$\lim Ax_n=\lim Tx_n=z.$$

इस प्रपत्र के प्रमेय में (देखें प्रतिबन्ध (iii)) $\{Ax_n\}$ को पहले पहल फिशर द्वारा[1] परिभाषित किया गया। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि $(x)\subset s(x)\cap T(x)$, तो x के प्रत्येक x_0 के लिये अनुक्रम $\{x_n\}$ एवं $\{Ax_n\}$ निश्चय ही विद्यमान हैं।

हम सिंह तथा कुमार[4] के परिणाम को निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करके सुधारेंगे।

प्रमेय :

माना कि (x, d) d-संतत तथा x पर आत्म प्रतिचित्रणों A, S, T से युक्त एक 2-दूरीक समष्टि है। यदि α तथा β ऐसी असली संख्याएँ हों कि $0<\alpha+\beta<1$ तथा

(i) $$d(Ax, Ay, a)\leqslant[\alpha d(Sx, Sy, a)\, d(Ax, Ay, a)$$
$$+\beta d(Tx, Ty, a)\, d(Sy, Ay, a)]^{1/2}.$$

(ii) x में विन्दु x_0 के लिये एक अनुक्रम $\{x_n\}$ पाया जाता है जो

$$Sx_{2n+1}=Ax_{2n}, \qquad Tx_{2n+2}=Ax_{2n+1},$$

$$Ax_{n+1}\neq Ax_{n+2}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

की तुष्टि करता है।

(iii) अनुक्रम $\{Ax_n\}$ का एक उपअनुक्रम होता है जो x में विन्दु z तक अभिसरण करता है।

(iv) A, S, T संतत हैं z पर।

(v) $\{A, S\}$ एवं $\{A, T\}$ z-उपगामितः क्रमविनिमयी युग्म हैं।

तब z संपात-विन्दु है A, S तथा T का। यदि $0<\alpha<1$ तो z सर्वसम स्थिर विन्दु है A, S एवं T का जो अद्वितीय भी है।

उपपत्ति :

(i) में $x=x_{2n}$ एवं $y=x_{2n+1}$ रखने पर

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) \leqslant [\alpha d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \; d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) + \beta \, d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \; d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)]^{1/2},$$

अर्थात्

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) \leqslant [(\alpha+\beta) \, d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \; d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)]^{1/2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$[d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)]^2 \leqslant (\alpha+\beta) \, d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a) \; d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)$$

अर्थात्

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a) \leqslant (\alpha+\beta) \, d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, a),$$

इसी तरह से (i) में $x=x_{2n+1}$ तथा $y=2n+2$ होने से

$$d(Ax_{2n+2}, Ax_{2n+1}, a) \leqslant (\alpha+\beta) d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a).$$

इसलिये x के समस्त $n=1, 2, 3, \ldots,$ के लिये

$$d(Ax_{n+1}, Ax_{n+2}, a) \leqslant h \, d(Ax_n, Ax_{n+1}, a),$$

जहाँ

$$(\alpha+\beta)=h, \; h \in [0, 1].$$

प्रमेय 1 से (सिंह[5]) $\{Ax_n\}$ एक कौशी अनुक्रम होता है। अत: प्रतिबन्ध (iii) से $Ax_n \to z$, $Sx_{2n+1} \to z$ एवं $Tx_{2n+2} \to z$. अत: (iv) से $ATx_{n_i} \to Az$ एवं $TAx_{n_i} \to Tz$, जहाँ $\{n_i\}$ उप अनुक्रम है अनुक्रम $\{n\}$ का।

चूंकि A तथा T z-उपगामित: क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं इसलिये x के प्रत्येक a के लिये

$$\lim d(ATx_{n_i}, TAx_{n_i}, a)=0,$$

चूंकि d संतत है इसलिये प्रत्येक $a \in x$ के लिये

$$d(Ax, Tz, a)=0.$$

इसका अर्थ यह हुआ कि

$$Az=Tz \text{ तथा इसी तरह } Az=Sz.$$

अतः z संपात विन्दु है A, S तथा T का। अब (i) में $x=x_{2n}$ तथा $y=z$ रखने और सीमा मान लेने पर

$$d(z, Az, a) \leqslant \alpha d(z, Az, a) < d(z, Az, a).$$

जिसका अर्थ हुआ कि $Az=z$। इसी प्रकार $Sz=z$ तथा $Tz=z$. अंतः z सर्वसम स्थिर विन्दु है A, S तथा T का और यह आसानी से देखा जा सकता है कि z अद्वितीय स्थिर विन्दु है A, S तथा T का। अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

निर्देश

1. फिशर, बी०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, 7, 81-84.
2. सिंह, एस० एल० तथा तिवारी, बी० एम० एल०, J. UPGC., Acad. Soc., 1986, 3, 13-18.
3. सिंह, एस० एल० तथा कुमार, वी०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1987, 30, 207-212.
4. वही : वही, 1987, 30, 207-212
5. सिंह, एस० एल०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1979, 7, 1-11.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 34, No. 4, 1991

दो चरों वाले H-फलन से युक्त एक द्विगुण समाकल

वी० सी० नायर तथा एम० आर० प्रसन्नाकुमारी
संप्रयुक्त विज्ञान तथा मानविकी विभाग
रीजनल इंजीनियरी कॉलेज, कालीकट (केरल)

[प्राप्त—जनवरी 17, 1990]

सारांश

दो चरों वाले H-फलन से युक्त एक द्विगुण समाकल का मान ज्ञात किया गया है। राठी द्वारा सिद्ध किये गये एक समाकल को विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किया गया है।

Abstract

A double integral involving H-function of two variables. *By* V. C. Nair and M.R. Prasanna Kumari, Department of Applied Sciences and Humanities, Regiona Engineering College, Calicut (Kerala).

A double integral involving an H-function of two variables is evaluated. An integral proved by Rathie (8, p. 12) is obtained as a special case. Many other interesting special cases are also obtained.

1. प्रयुक्त परिभाषाएँ तथा फल

प्रसाद तथा प्रसाद[1] ने दो चरों को H-फलन को निम्नवत् परिभाषित किया है—

$$H[x,y]=\mathrm{H}^{M,N\,:\,(m,n)\,:\,(g,h)}_{P,Q\,:\,(p,q)\,:\,(u,v)}\left[\begin{matrix}((a_P;\,\alpha_P,\,A_P)):((c_p,C_p)):((e_u,E_u))\\((b_Q;\,\beta_Q,\,B_Q)):((d_q,D_q)):((f_v,F_v))\end{matrix};x,y\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L1}\int_{L2}\phi_1(s)\phi_2(t)\psi(s,t)x^s y^t ds\,dt\,,$$

जहाँ

$$i=\sqrt{-1} \tag{1.1}$$

$$\phi_1(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(d_j-D_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-c_j+C_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-d_j+D_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(c_j-C_js)}, \tag{1.2}$$

$$\phi_2(t)=\frac{\prod_{j=1}^{g}\Gamma(f_j-F_jt)\prod_{j=1}^{h}\Gamma(1-e_j+E_jt)}{\prod_{j=g+1}^{v}\Gamma(1-f_j-F_jt)\prod_{j=h+1}^{u}\Gamma(e_j-E_jt)}, \tag{1.3}$$

तथा

$$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(b_j-\beta_js-B_jt)\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+\alpha_js+A_jt)}{\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_j+\beta_js+B_jt)\prod_{j=N+1}^{P}\Gamma(a_j-\alpha_js-A_jt)}, \tag{1.4}$$

जहाँ $x, y\neq 0$, रिक्त गुणनफल को इकाई माना जाता है $M, N, P, Q, m, n, p, q, g, h, u, v$, सभी पूर्ण संख्याएँ हैं जिससे कि $0\leqslant M\leqslant Q$, $0\leqslant N\leqslant P$, $Q\geqslant 0$, $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$, $0\leqslant g\leqslant v$, $0\leqslant h\leqslant u$ तथा $\alpha_j, \beta_j, A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j$ सभी धनात्मक हैं।

प्राचलों (a_P), (b_Q), (c_p), (d_q), (e_u) का अनुक्रम तथा (f_v) इतने प्रतिबन्धित हैं कि समाकल्य का कोई भी पोल नहीं मिलता।

कंटूर L_1 संमिश्र s-तल में स्थित है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण होता है (यदि आवश्यकता पड़ी तो) जिससे आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(d_j-D_js), j=1, \ldots, m$ एवं $\Gamma(b_j-\beta_js-B_jt)$, $j=1, \ldots, M$ के पोल पथ के दाईं ओर अवस्थित हैं और $\Gamma(1-c_j+C_js)$, $j=1, \ldots, n$ एवं $\Gamma(1-a_j+\alpha_js+A_jt), j=1, \ldots, N$ के पोल पथ के बाईं ओर।

यही नहीं, कंटूर L_2 संमिश्र t-तल में स्थित है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(f_j-F_jt), j=1, \ldots, g$ तथा $\Gamma(b_j-\beta_js-B_jt)$, $j=1, \ldots, M$ पथ के दाहिनी ओर स्थित हैं तथा $\Gamma(1-e_j+E_jt), j=1, \ldots, h$ एवं $\Gamma(1-a_j+\alpha_js+A_jt), j=1, \ldots, N$ के पोल पथ के बायीं ओर। समाकल्य के सारे पोल सरल पोल हैं।

संक्षेपणों (a_p), $((a_p, A_p)$ एवं $((a_p, \alpha_p, A_p))$ द्वारा p-प्राचलों के अनुक्रमों का द्योतन इस प्रकार होता है

$$(a_p)=a_1, a_2, \ldots, a_p$$

$$((a_p, A_p))=(a_1, A_1), (a_2, A_2), \ldots, (a_p, A_p)$$

तथा

$$((a_p; \alpha_p, A_p))=(a_1; \alpha_1, A_1), (a_2; \alpha_2, A_2), \ldots, (a_p; \alpha_p, A_p)$$

बुशमैन[2] ने दो चरों वाले H-फलन के अभिसरण प्रतिबन्धों का एक सेट प्रदान किया है।

(1.1) द्वारा परिभाषित फलन $H[x,y]$ x तथा y का एक विश्लेषिक फलन है यदि

$$V_1<0, V_2<0$$

जहाँ

$$V_1=\sum_{j=1}^{P}(\alpha_j)+\sum_{j=1}^{p}(C_j)-\sum_{j=1}^{Q}(\beta_j)-\sum_{j=1}^{q}(D_j) \quad (1.5)$$

तथा

$$V_2=\sum_{j=1}^{P}(A_j)+\sum_{j=1}^{u}(E_j)-\sum_{j=1}^{Q}(B_j)-\sum_{j=1}^{v}(F_j) \quad (1.6)$$

(1.1) के दायें पक्ष का द्विगुण समाकल अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x|<\tfrac{1}{2}\Delta_1\pi$$

तथा

$$|\arg y|<\tfrac{1}{2}\Delta_2\pi$$

जहाँ

$$\Delta_1=\sum_{j=1}^{N}(\alpha_j)-\sum_{j=N+1}^{P}(\alpha_j)+\sum_{j=1}^{M}(\beta_j)-\sum_{j=M+1}^{Q}(\beta_j)+\sum_{j=1}^{m}(D_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(D_j)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(C_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(C_j)>0 \quad (1.7)$$

तथा

$$\Delta_2=\sum_{j=1}^{N}(A_j)-\sum_{j=N+1}^{P}(A_j)+\sum_{j=1}^{M}(B_j)-\sum_{j=M+1}^{Q}(B_j)+\sum_{j=1}^{g}(F_j)-\sum_{j=g+1}^{v}(F_j)$$

$$+\sum_{j=1}^{h}(E_j)-\sum_{j=h+1}^{u}(E_j)>0 \quad (1.8)$$

निम्नलिखित परिणामों को[1,3,4,5,6] प्रयुक्त किया जावेगा

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,d\theta=e^{i\pi\alpha/2}\,\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ R(\alpha)>0,\ R(\beta)>0. \quad (1.9)$$

$$\int_0^\infty x^{r-1/2}[(x+a)(x+b)]^{-r}\, dx = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2r}\,\frac{\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma(r)},\ R(r)>\tfrac{1}{2} \quad (1.10)$$

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\,\pi^{-1/2}\,\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \quad (1.11)$$

$$x^{\mu}J_{v}(x)=2^{\mu}G^{1,0}_{0,2}\left[1/4x^2\,\Big/\,\frac{\mu+v}{2},\frac{\mu-v}{2}\right] \quad (1.12)$$

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;\,b_1,\ldots,b_q;\,-x)=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\,x.\,G^{1,p}_{p,q+1}\left[x\,\Big/\,\begin{matrix}-a_1,\ldots,-a_p\\ -1,-b_1,\ldots,-b_q\end{matrix}\right],$$

$$p\leqslant q+1. \quad (1.13)$$

$$H^{o,m:(1,n),(1,n)}_{m,p:(n,q+1),(n,q+1)}\left[\begin{matrix}-x\\ -y\end{matrix}\,\Big/\,\begin{matrix}((1-a_m;1,1)):((1-c_n,1)):((1-e_n,1))\\ ((1-b_p;1,1)):(0,1),((1-d_q,1)):(0,1),((1-f_q,1))\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j)\prod_{j=1}^{n}\{\Gamma(c_j)\,\Gamma(e_j)\}}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(b_j)\prod_{j=1}^{q}\{\Gamma(d_j)\,\Gamma(f_j)\}}\;F^{m,n}_{p,q}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

जहाँ

$F^{m,n}_{p,q}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ काम्पे द फेरी फलन है जिसकी परिभाषा

$$F^{m,n}_{p,q}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{n}\{\Gamma(c_j)_r\,\Gamma(e_j)_s\}}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(b_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{q}\{\Gamma(d_j)_r\,\Gamma(f_j)_s\}}\times\frac{x^r y^s}{r!s!}$$

के रूप में की जाती है । साथ ही

$$m+n<p+q+1$$

अथवा

$$m+n=p+q+1$$

तथा

$$|x|+|y|< \min(1, 2^{p-m+1}). \tag{1.14}$$

2. मुख्य परिणाम

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r,\theta,\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{r}\sin\theta\cos\theta} \mathrm{H}^{M,N:(m,n),(g,h)}_{P,Q:(p,q),(u,v)} \left[\begin{matrix}((a_P;\alpha_P,A_P)):((c_p,C_p)):((e_u,E_u))\\((b_Q;\beta_Q,B_Q)):((d_q,D_q)):((f_v,F_v))\end{matrix} : Z\,\phi(r,\theta,\delta_1,\mu_1,\lambda_1),\, U\,\phi(r,\theta,\delta_2,\mu_2,\lambda_2)\right] dr d\theta$$

$$\sqrt{\pi}e^{i\pi a/2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\, \mathrm{H}^{M,N+3\;:(m,n):(g,h)}_{P+3,Q+2:(p,q):(n,v)} \left[\begin{matrix}(3/2-\gamma;\lambda_1,\lambda_2),(1-\alpha;\mu_1,\mu_2),(1-\beta;\delta_1,\delta_2),((a_P;\alpha_P,A_P)):((c_p,C_p)):((e_u,E_u))\\((b_Q;\beta_Q,B_Q)),(1-\gamma;\lambda_1,\lambda_2),(1-\alpha-\beta;\mu_1+\delta_1,\mu_2+\delta_2):((d_q,D_q)):((f_v,F_v))\end{matrix} : ze^{i\pi\mu_1/2},\, ue^{i\pi\mu_1/2}\right], \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\phi(r,\theta,\alpha,\beta,\gamma)=e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^\alpha(\cos\lambda)^\beta\left[\frac{r(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(r+a)(r+b)}\right]^\gamma, \tag{2.2}$$

बशर्ते

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2>0,\ \Delta_1>0,\ \Delta_2>0$$

जहाँ Δ_1 तथा Δ_2 को (1.7) तथा (1.8) द्वारा विशेष रूप से परिभाषित किया जाता है

$|\arg z+(\delta_1+\mu_1)\pi/2| \quad <\tfrac{1}{2}\Delta_1\pi,$

$|\arg u+(\delta_2+\mu_2)\pi/2| \quad <\tfrac{1}{2}\Delta_2\pi,$

$R[\alpha+\mu_1(b_j/\beta_j)+\mu_2(b_j/B_j)]>0\ j=1,\ldots,M,$ के लिए

$R[\beta+\delta_1(b_j/\beta_j)+\delta_2(b_j/B_j)]>0\ j=1,\ldots,M,$,,

$R[\gamma+\lambda_1(b_j/\beta_j)+\lambda_2(b_j/B_j)]>\tfrac{1}{2}\ j=1,\ldots,M,$,,

$R[\alpha+\mu_1(d_j/\delta_j)] \quad >0\ j=1,\ldots,m,$,,

$R[\beta+\delta_1(d_j/\delta_j)] \quad >0\ j=1,\ldots,m,$,,

$R[\gamma+\lambda_1(d_j/\delta_j)] \quad >\tfrac{1}{2}\ j=1,\ldots,m,$,,

$R[\alpha+\mu_1(f_j/F_j)] \quad >0 \; j=1, \ldots, g,$,,

$R[\beta+\delta_1(f_j/F_j)] \quad >0 \; j=1, \ldots, g,$,,

$R[\gamma+\lambda_1(f_j/F_j)] \quad >\frac{1}{2} \; j=1, \ldots, g.$,,

उपपत्ति :

(2.1) के बायीं ओर के दो चरों वाले H-फलन को एक कंटूर समाकल के रूप में व्यक्त करने पर (2.1) का बायां पक्ष निम्नवत् होगा

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt{r} \sin\theta \cos\theta} \left\{ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L1} \int_{L2} \phi_1(s)\phi_2(t)\psi(s,t) z^s [\phi(r,\theta,\delta_1,\mu_1,\lambda_1]^s \right.$$

$$\left. u^t [\phi(r,\theta,\delta_2,\mu_2,\lambda_2]^t \, ds dt \right\} dr d\theta$$

जहाँ $\phi_1(s)$, $\phi_2(t)$ तथा $\psi(s,t)$ को क्रमशः (1.2), (1.3) एवं (1.4) द्वारा परिभाषित किया जाता है। समाकलनों के क्रम को बदलने तथा परिणाम (1.9) एवं (1.10) का उपयोग करने पर यह निम्न में समानीत हो जाता है

$$\sqrt{\pi}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \, e^{i\pi\alpha/2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L1} \int_{L2} \phi_1(s)\phi_2(t)\psi(s,t)(ze^{i\pi\mu_1/2})^s \, (ue^{i\pi\mu_2/2})^t$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\mu_1 s+\mu_2 t) \, \Gamma(\beta+\delta_1 s+\delta_2 t) \, \Gamma(\gamma+\lambda_1 s+\lambda_2 t-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\beta+(\mu_1+\delta_1)s+(\mu_2+\delta_2)t) \, \Gamma(\gamma+\lambda_1 s+\lambda_2 t)} \, ds dt \tag{2.3}$$

तब (1.1) का उपयोग करने पर (2.1) का दायाँ पक्ष प्राप्त किया जाता है।

जब दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं, जो निहित समाकलों की परम अभिसारिता के कारण हैं तो समाकलन के क्रम का परिवर्तन वैध होता है।

3. विशिष्ट दशाएँ :

जब

$$M=0, N=0, P=0, Q=0, \mu_2=0, \lambda_2=0, \delta_2=0$$

तो हमें

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r,\theta,\alpha,\beta,\gamma,)}{\sqrt{r} \sin\theta \cos\theta} \, H^{m,n}_{p,q} \left[\begin{matrix} ((c_p,C_p)) \\ ((d_q,D_q)) \end{matrix} : z\phi(r,\theta,\delta_1,\mu_1,\lambda_1) \right] dr d\theta$$

$$=\sqrt{\pi}e^{i\pi\alpha/2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\, H^{m,n+3}_{p+3,q+2}\left[\begin{matrix}(3/2-\gamma,\lambda_1),\ (1-\alpha,\mu_1),\ (1-\beta,\delta_1),\ ((c_p,C_p)) \\ ((d_q.D_q)),\ \ (1-\gamma,\lambda_1),\ \ (1-\alpha-\beta,\delta_1+\mu_1)\end{matrix} : z\right] \tag{3.1}$$

मिलता है जहाँ ϕ को (2.2) द्वारा परिभाषित किया जाता है बशर्ते

$$\lambda_1>0,\delta_1>0,\mu_1>0,\ R(\alpha)>0,\ R[\beta+d_1(b_j/f_j)]>0,\ R[\gamma+\lambda_1(b_j/f_j)]>\tfrac{1}{2},$$

$$j=1,\ \ldots,\ m,\quad \Delta=\sum_{j=1}^{n}c_j-\sum_{j=n+1}^{p}C_j+\sum_{j=1}^{m}d_j-\sum_{j=m+1}^{q}D_j>0,\ |\arg z|<\Delta\pi/2.$$

राठी ने सिद्ध किया कि $\mu_1=0$ जब $\mu_1=0$

निम्नलिखित दो समाकलों को क्रमशः (1.9) तथा (1.10) का प्रयोग करते हुये स्वतन्त्र रूप से सिद्ध किया जा सकता है इनके गुणनफल को (2.1) की विशेष दशा के रूप में निकाला जा सकता है।

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}\,(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}J_v(xe^{i\theta/2}\sqrt{\cos\theta})d\theta$$

$$=\Gamma(\alpha)e^{i\pi/2}\,\frac{(x/2)^v\,\Gamma(v/2+\beta)}{\Gamma(1+v)\,\Gamma(v/2+\alpha+\beta)}\ {}_1F_2\left(\begin{matrix}\beta+v/2\\1+v,\ \alpha+\beta+v/2\end{matrix};\ -x^2/4\right),$$

$$R(\beta+v/2)>0,\ R(\alpha)>0 \tag{3.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{r^{\gamma-1/2}}{[(r+a)(r+b)]^\gamma}J_\mu\left[\frac{y\sqrt{r}}{\sqrt{(r+a)(r+b)}}\right]dr$$

$$=\sqrt{\pi}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2\gamma}\left[\frac{y/2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right]^\mu\frac{\Gamma(\mu/2-\frac{1}{2}+\gamma)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(\mu/2+\gamma)}$$

$${}_1F_2\left(\begin{matrix}\mu/2+\gamma-\frac{1}{2}\\1+\mu,\ \mu/2+\gamma\end{matrix}:\frac{-y2/4}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\right),\quad R(\gamma+\mu/2-\tfrac{1}{2})>0. \tag{3.3}$$

(2.1) में

$$M=0,\ N=P,\ m=g=1,\ n=h=u=p,\ \lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=\delta_1=\delta_2=1,$$

रखें तो प्रत्येक

$$\alpha_P=A_P=B_Q=\beta_Q=C_p=D_q=E_u=F_v=1,$$

q तथा v के स्थान पर $q+1$, a_P के स्थान पर $1-a_P$, b_Q के स्थान पर $1-b_Q$, c_p के स्थान पर $1-c_p$, d_q के स्थान पर $1-d_q$, e_p के स्थान पर $1-e_p$ तथा f_q के स्थान पर $1-f_q$ रखने एवं (1.11) एवं (1.14) का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\phi(r,\theta,a,\beta,\gamma)}{\sqrt{r}\sin\theta\cos\theta}$$

$$F^{P,p}_{Q,q}\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_P; c_1, e_1, \ldots, c_p, e_p : -z\phi(r,\theta,1,1,1) \\ b_1, \ldots, b_Q; d_1, f_1, \ldots, d_q, f_q : -u\phi(r,\theta,1,1,1 \end{bmatrix} drd\theta$$

$$2^{\alpha+\beta-1} e^{i\pi a/2} (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \frac{\Gamma(\gamma-\frac{1}{2})\, \Gamma(a)\, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\, \Gamma(a+\beta/2)\, \Gamma(a+\beta+1)/2}$$

$$F^{P+3;p}_{Q+3,q}\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_P, \gamma-\frac{1}{2}, \quad a, \beta \quad : c_1, e_1, \ldots, c_p, e_p : -4ze^{i\pi/2} \\ b_1, \ldots, b_Q, \gamma, a+\beta/2, a+\beta+1/2 : d_1, f_1, \ldots, d_q, f_q : -4ue^{i\pi/2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

जहाँ ϕ की परिभाषा

$$R[\alpha]>0,\ R[\beta]>0,\ R[\gamma-\tfrac{1}{2}]>0$$

के रूप में दी जाती है तथा z एवं μ असली हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय कालीकट के प्रक्षेत्रीय कालेज के प्रिंसिपल को धन्यवाद देना चाहेंगे कि आवश्यक सुविधाओं का हम भोग कर सके।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा काम्पे द फेरी जे०, Functions of Hypergeometriques et Hyperspheriques, Polynomes, d' Hermites. Gauthier, Villars, 1926
2. बुशमान, आर० जी०, Indian J. Math. 1978, 20 (P. L. hatnagar- Volume) H function of n-variables, Dept. of Math. University of Wyoming.
3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल बुक कम्पनी, 1954
4. वही, Higher Trauscedental functions. मैकग्राहिल 1955
5. ग्रिडेस्टाइन, आई० एम० तथा रैजिक आई० एम०, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1965
6. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math Annalen, 1960-61, **142**, 450-452.
7. प्रसाद, वाई० एम० तथा प्रसाद, एस०, Jour of Scientific Research, Banaras Hindu University 1979, **30**(1), 67-76.
8. राठी, ए० के०, विज्ञानपरिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1979, **22**., 12

VijnanaParishad Anusandhan Patrika, Vol. 34. No. 4, 1991

गैसीय बॉयलर का संरक्षण : इसका रासायनिक उपचार

मीणा भर्तिया तथा यू॰ एस॰ चतुर्वेदी
रसायन विभाग, एम॰ एस॰ जे॰ स्वायत्तशासी कालेज, भरतपुर (राज॰)

[प्राप्त—दिसम्बर 20, 1990]

सारांश

आक्सीजन, कार्बनडाइ आक्साइड, सल्फरडाइआक्साइड जैसी विलयित गैसें जल में कठोरता उत्पन्न करती हैं जिससे बॉयलर का संक्षरण होता है। कठोरता दूर करने तथा संक्षारण रोकने के लिए अनेक यौगिक उपयोगी पाये गये हैं किन्तु इनमें से हाइड्रैजीन सबसे अधिक सफल है।

Abstract

Gaseous boiler corrosion : its chemical treatment. *By* Meena Bhartiya and U. S. Chaturvedi, Department of Chemistry, M.S.J. Autonomous College, Bharatpur (Raj.).

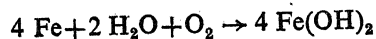
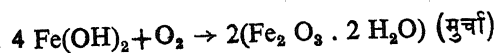
Dissolved gases like oxygen, carbon dioxide, sulphur dioxide create hardness in water, resulting in boiler corrosion. A number of compounds have been found useful for removing the hardness and preventing corrosion, but hydrazine has been found to be most successful.

सामान्यतया यह माना जाता है कि धातुओं के सल्फेट, क्लोराइड तथा कार्बोनेट जल में कठोरता उत्पन्न करने वाले हैं। किन्तु अनेक विलयित गैसें—यथा O_2, CO_2 तथा SO_2 भी प्रर्याप्त संक्षारण उत्पन्न करती हैं। उदाहरणार्थ, 300 °C ताप पर एक लीटर बॉयलर जल में 8 मिली॰ विलयित आक्सीजन रहती है। जलीय पर्यावरण में आक्सीजन लोह से अभिक्रिया करके मुर्चा बनाती है। बॉयलर की सतह पर मन्द गति से जमा हुआ मुर्चा से उसका संक्षारण हो जाता है।

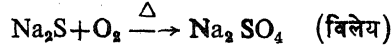
30°C पर

$$4\,Fe + 2\,H_2O + O_2 \rightarrow 4\,Fe(OH)_2$$

100°C से ऊपर

$$4\,Fe(OH)_2 + O_2 \rightarrow 2(Fe_2\,O_3\,.\,2\,H_2O) \text{ (मुर्चा)}$$

यदि कठोर जल का पूर्व उपचार किया जाय तो विलयित आक्सीजन की मात्रा कम की जा सकती है। लेकिन रासायनिक उपचार सर्वश्रेष्ठ इलाज है।

परम्परा के अनुसार सोडियम सल्फेट तथा सोडियम सल्फाइट को विलयित आक्सीजन के उदासीनीकरण के लिए प्रयुक्त हुआ है

$$Na_2S+O_2 \xrightarrow{\Delta} Na_2SO_4 \quad \text{(विलेय)}$$

बाद में यह ज्ञात हुआ कि हाइड्रैजीन विलयित आक्सीजन, कार्बन डाइ आक्साइड तथा प्राइमिंग को दूर करने के लिए आदर्श अभिकर्मक है। इसके मुख्य लाभ निम्नवत् है :

1. यह संवेदनशील अभिकर्मक है।
2. यह सरलता से जल में विलेय है।
3. इसका जलीय विलयन क्षारीय होता है जो उच्चतर ताप पर अमोनिया मुक्त करता है और इस तरह जल में विलयित कार्बन डाइ आक्साइड को नियन्त्रित रखता है।
4. यह आक्सीन को विस्थापित करता है तथा CO_2 एवं SO_2 को शोषित करता है। इस तरह उनकी मात्रा को कम करता है।
5. आक्सीजन इसकी अभिक्रिया से नाइट्रोजन निकलती है और जल बनता है। इस तरह विलयित ठोसों की सान्द्रता को बढ़ाये बिना ही हाइड्रैजीन आक्सीजन को दूर करता है।
6. यह गंधक, सेलीनियम, आर्सेनिक, फास्फोरस आदि को विलयित कर सकता है।
7. अक्रिय रासायनिक पर्यावरण प्रदान करता है।

जल में घटित होने वाली कुल अभिक्रियाओं को निम्नवत् दर्शाया जा सकता है—

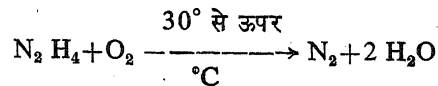
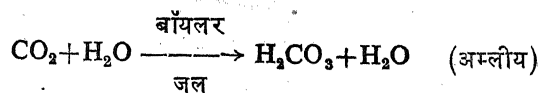
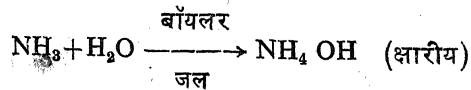
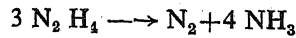
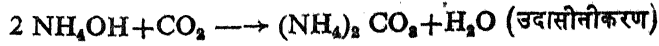
$$N_2H_4+O_2 \xrightarrow[\text{°C}]{30^\circ \text{ से ऊपर}} N_2+2H_2O$$

100°C से अधिक ताप पर

$$3N_2H_4 \longrightarrow N_2+4NH_3$$

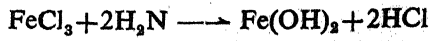
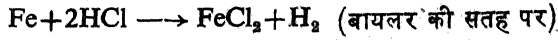
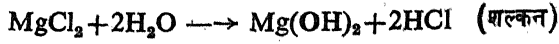
$$NH_3+H_2O \xrightarrow[\text{जल}]{\text{बॉयलर}} NH_4OH \quad \text{(क्षारीय)}$$

$$CO_2+H_2O \xrightarrow[\text{जल}]{\text{बॉयलर}} H_2CO_3+H_2O \quad \text{(अम्लीय)}$$

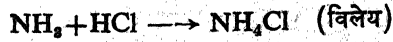
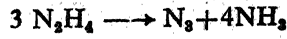
$$2\,NH_4OH+CO_2 \longrightarrow (NH_4)_2\,CO_3+H_2O$$ (उदासीनीकरण)

सामान्यतया उच्च ताप पर कठोर जल के मैग्नीशियम लवण बॉयलर जल के साथ अभिक्रिया करते हैं जिससे शल्क-निर्माण होता है और हाइड्रोक्लोरिक अम्ल मुक्त होता है।

$$MgCl_2+2H_2O \longrightarrow Mg(OH)_2+2HCl$$ (शल्कन)

$$Fe+2HCl \longrightarrow FeCl_2+H_2$$ (बायलर की सतह पर)

$$FeCl_3+2H_2N \longrightarrow Fe(OH)_2+2HCl$$

इस तरह अम्ल का बारम्बार आक्रमण होता रहता है। अम्ल का निर्माण हाइड्रैजीन डालने से रुक जाता है

$$3\,N_2H_4 \longrightarrow N_2+4NH_3$$

$$NH_3+HCl \longrightarrow NH_4Cl$$ (विलेय)

बॉयलरों के शल्कन को रोकने की अनेक विधियाँ हैं—यथा गैल्वनीकरण, विलेपन, जल का पूर्व उपचार तथा रासायनिक उपचार। हमारे विचार से रासायनिक उपचार अपेक्षतया सस्ता तथा सुकर है और इसका प्रभाव बॉयलर के अन्दर दीर्घकाल तक बना रहता है।

निर्देश

1. वेबर, जूनियर, डब्लू० जे०, Physico-Chemical Processes for Water Quality Control, Wiley Interscience New York (1972).
2. Water Pollution and Control, Environ. Sci. Techn. 1974, 8, 22.
3. डुगन, पी० आर०, Biochemical Ecology of Water Pollution, Plenum Press, New York (1972).
4. बर्ग, जी० सी०, Water Pollution, Institute of Public Information, New York (1970).
5. एलेन, एच० ई० तथा क्रेमर, जे० आर०, Pollutants in Natural Water, Wiley Interscience, New York (1972).

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80।**

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

सम्पादक
डा० चन्द्रिका प्रसाद
डी० फिल०

Editor
Dr. Chandrika Prasad

प्रबन्ध सम्पादक
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,
एम० एस-सी०, डी० फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 30 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 8 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 30 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 8 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद